ریاضیات در شرق

ترجمه پرویز شهریاری

ریاضیات در شرق

ترجمهٔ پرویز شهریاری

شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

پرویز شهریاری
ریاضیات در شرق
(ترجمهٔ مجموعهٔ مقالات)

چاپ اول: بهمن‌ماه ۱۳۵۲ ﻫ. ش.
چاپ و صحافی: شرکت افست (سهامی خاص) چاپخانه بیست‌وپنجم شهریور
تعداد ۲۲۰۰ نسخه

شمارهٔ ثبت کتابخانهٔ ملی ۱۶۵۸ به‌تاریخ ۵۲/۱۱/۲۱

فهرست

۱

در بارهٔ تاریخ ریاضیات

ک. و. گنه دنکو

آشنائی با تاریخ علم، برای هر روشنفکری مفید است، ولی برای معلمین اطلاع از حقایق اساسی تاریخ در زمینه‌ای که با آن سر و کار دارند و آشنائی به قوانین تکامل آن ضرورت کامل دارد.

همهٔ ما از دوران تحصیلی خود بخاطر داریم که نظر مختصری به تاریخ یک رشتهٔ علمی، چقدر برای ما جالب توجه بود. بیان چند جمله از تاریخ ریاضی و یا کاربرد ریاضی در مسأله‌هایی که در مقابل جامعه‌های بشری وجود داشت و یا اهمیت مطالب مربوط به زندگی تجربی برای پیشرفت خود ریاضی، تا چه اندازه شرح مطالب درسی ریاضی را زنده و قابل درک می‌کرد. ذوق و شوق دانش‌آموزان، در مورد حل و بحث مسائلی که مربوط به صدها سال قبل است، غیر قابل وصف است. و این مطلب روشن است که علاقه به موضوع درس، یکی از شرطهای اساسی برای توفیق در یادگیری و تحکیم معلومات بدست آمده در حافظه است. اطلاعات مربوط به تاریخ ریاضی وسیلهٔ پرارزشی است که معلم را در پیش‌برد روش آموزشی خود کمک می‌کند. تاریخ ریاضی می‌تواند روشن کند که چگونه هدف آموزش ریاضی در جریان گذشت زمان تغییر می‌کند. گفتگوی معلم با شاگردان خود، در زمینهٔ تاریخ علم، وسیلهٔ ارزنده‌ای است برای برانگیختن نیروهای خلاقهٔ جوانان و برای تحکیم اعتقاد آنها به استعدادهای نهفتهٔ خود. تاریخ ریاضی به معلم امکان می‌دهد که از نقش ریاضیات

در پیشرفت فنون و علوم دیگر و نیز در تکامل نظر فلسفی بشر نسبت به طبیعت و اندازهٔ اهمیت آن در زمان ما، تصویری ترسیم کند.

متأسفانه، کتابهائی که معلم بتواند اطلاعات ضروری را در زمینهٔ تاریخ علم از آنها بدست آورد معدود است و بخصوص با توجه به وقت محدودی که معلم در کلاس دارد کتابهائی مورد نیاز است که دقیقاً نحوهٔ استفادهٔ از این منابع و این که طرح چه مطلبی در کجا و چه موقع لازم است، روشن کند. و اینهم مربوط به معلمین با تجربه است که با کار دسته‌جمعی، کتابهای مورد نیاز مدارس را تهیه کنند.

معلمین و دانش آموزان ما به کتابهائی نیاز دارند که در آنها به زندگی بزرگان و نمایندگان دانش بشری نظر کوتاه ولی گویائی انداخته باشد. در زمینهٔ تاریخ ریاضی باید دو نوع کتاب تنظیم شود: یکی مربوط به ریاضی‌دانهای مشهور همهٔ جهان و دیگری دربارهٔ کشور خودمان. طبیعی است که در کتاب اول هم دانشمندان میهن ما نباید فراموش شوند. علاوه بر آن باید کتابهائی تنظیم شود که ارتباط علم را با زندگی و عمل روشن کند، داستان بوجود آمدن موضوعهای ریاضی را شرح دهد و نحوهٔ ارتباط آنهارا بامشکلاتی‌که طبیعت در مقابل بشر می‌گذارد و یا نیازهای فنی و دفاعی به او تحمیل می‌کند، بیان نماید.

البته تهیهٔ اینگونه کتابها آسان نیست، ولی رنجی که مؤلفین در این راه تحمل می‌کنند، به هدر نمی‌رود، زیرا همین کتابها هستند که راه زندگی را به جوانها نشان می‌دهد و استعدادهای خفتهٔ آنها را بیدار می‌کندو همین شکفتگی استعدادهاست که ثمر خود را در پیشرفت علم ببار می‌آورد.

بین رشته‌های علمی، که بشر در طول هزاران سال به وجود آورده، ریاضیات جای مخصوص و ضمناً مهمی را اشغال کرده است. ریاضیات با علوم فیزیک، زیست شناسی، اقتصاد و فنون مختلف فرق دارد، با وجود این به عنوان یکی از روشهای اصلی دربررسیهای مربوط به فیزیک، زیست شناسی، صنعت و اقتصاد بکار می‌رود و در آینده این نقش ریاضیات بازهم هرچه بیشتر گسترش پیدا می‌کند.

ریاضیات، که در دوره‌های باستانی به‌وجود آمد، در جریان پیشرفت خود راهی طولانی و بغرنج پیموده است. در طول هزاران سال مرتباً خصوصیات،

موضوع و نیروهای محرکهٔ آن تغییر کرده است. ریاضیات از به وجود آوردن اولین مفاهیم مربوط به‌خط راست، به عنوان کوتاهترین فاصلهٔ بین دو نقطه، یا تشکیل اولین عناصر اعداد به عنوان واحدهای اولیه، راه خود را آغاز کرد تا امروز که بیک علم انتزاعی خالص تبدیل شده است و مفاهیم و روشهائی کاملاً مخصوص بخود دارد. زمانی بود که بشر با زحمت فوق‌العاده ۲ را با ۳ جمع و یا ۴ را از ۷ کم می‌کرد، ولی امروز، البته پس از گذشت هزاران سال، به‌جائی رسیده است که می‌تواند به محاسبهٔ حرکت اجرام سماوی و یا پدیده‌های داخلی اتم بپردازد. وسائل سادهٔ محاسبه مثل سنگریزه‌ها، قطعه چوبها، شکافهای روی درخت و یا قطعات اعضای بدن آدمی، جای خود را به ابزارهای جدیدی مثل ماشینهای محاسبهٔ الکترونی داده است که می‌توانند دهها و حتی صدها هزارعمل را روی اعداد چند رقمی در مدت یک ثانیه انجام دهند.

طبعاً این پرسشها پیش می‌آید: این راه ترقی چگونه طی شده است؟ چه عواملی مفاهیم و روشهای ریاضیات را تکامل داده است؟ مراحل اساسی تکامل ریاضیات و بطور کلی قوانین تکامل ریاضیات کدام است؟ اینها پرسشهای اساسی است که در مقابل تاریخ ریاضیات قرار دارد و باید به آن‌ها جواب داد. جواب به این پرسشها نه تنها از لحاظ مسائل تاریخی اهمیت دارد، بلکه بخصوص برای زندگی امروزی و برای پیشرفت علوم امروزی دارای اهمیت فوق‌العاده است. تنها به این وسیله است که تاریخ گذشتهٔ ریاضیات می‌تواند راه پیشرفت حال و آیندهٔ آن را روشن کند و خیلی بیشتر از آشنائی با اتفاقات سادهٔ تاریخی، قوانین تاریخی را معین کند. از این راه است که می‌توان کشف کرد چگونه و به چه وضعی ریاضیات معاصر به گذشتهٔ خود آرمیده و چگونه راه تکامل خود را بسوی آینده می‌گشاید؟ بالاخره این طریقهٔ برخورد با تاریخ ریاضی می‌تواند ارتباطی را که تکامل علوم طبیعی، صنعت و روابط تولیدی با پیشرفت ریاضیات دارد، کشف کند. چنین مطالعه‌ای برما روشن می‌کند که این تأثیر و ارتباط، متقابل است؛ یعنی همانطور که پیشرفت صنعت و علوم طبیعی ریاضیات را تکامل داده‌است، پیشرفت ریاضیات هم بنوبهٔ خود در ترقی صنعت و علوم طبیعی اثرگذاشته است*.

*) بی‌جهت نیست که ولادیمیر ایلیچ لنین، به تاریخ علم اهمیت زیادی←

دربارهٔ تاریخ ریاضی و اهمیت آن برای خود ریاضیات و برای پیشرفت علوم طبیعی و صنعت معاصر نقطه‌نظرهای مختلفی وجود دارد. ممکن است به تعداد زیادی از دانشمندان (که موفقیتهای جدی در رشته‌های اختصاصی ریاضی بدست آورده‌اند) برخورد کنیم که لزوم مطالعهٔ تاریخ ریاضیات را برای پیشرفت امروزی مفاهیم ریاضی، نفی کنند. عواملی که این نقطه نظر را به وجود آورده است چنین‌اند: البته تاریخ ریاضیات برای مطالعهٔ تکامل جامعه و شکل گرفتن فلسفه لازم است، ولی علم بجلو می‌رود و دائماً با مفاهیم و افکار جدیدی غنی می‌شود که در گذشته، حتی نشانه‌ای از آنها هم وجود نداشته است. بنابراین توجه به افکار و موضوعهای گذشته، ممکن است ذهن ما را از علم معاصر و آینده منحرف نماید. برای ما کاملاً روشن است که مطالعهٔ بسیاری از مطالب مربوط به گذشته، در مقام مقایسه با آنچه که امروز داریم، ابتدائی و حقیر بنظر می‌رسد. آیا از اینجا این نتیجه بدست نمی‌آید که مطالعهٔ تاریخ ریاضیات نمیتواند نقشی مثبت داشته باشد؟ حتی از این بالاتر، بار افکار گذشته ممکن است ما را به عقب بکشاند و اثر نامطلوبی روی پیشرفت افکار جدید و تکامل علم بطور کلی، بگذارد. بهمین مناسبت هواداران این طرز تفکر دائماً تبلیغ می‌کنند که تاریخ ریاضیات یک علم تاریخی است و بنابراین تنها به کسانی مربوط است که به مطالعهٔ تاریخ تکامل جامعه مشغولند.

حالا اگر این اعتقاد را بپذیریم که تاریخ ریاضیات اختصاصاً رشته‌ای از تاریخ عمومی است، بازهم در میان کتابهای تاریخی نشانه‌ای از آن نمی‌بینیم. کافی است کتابهای تاریخی را که برای دانش‌آموزان متوسطه نوشته شده و یا کتابهای تاریخ عمومی را مورد توجه قرار دهیم. دراین کتابهاهم چیزی دربارهٔ تاریخ تکامل علوم ـ ریاضیات، علوم طبیعی وصنعت ـ پیدا نمی‌کنیم. دراین‌کتابها نه نامی از ریاضی‌دانهای بزرگ پیدا می‌کنیم (و آیا فقط ریاضی‌دانها؟) و نه از خود دانش ریاضی، که درحقیقت بشر را به دوره‌های پیشرفت بعدی هدایت کرده

→ داده است. او می‌نویسد: «ادامهٔ کاربزرگ مارکس‌عبارتست از تحلیل دیالکتیکی تاریخ فکر انسان، تاریخ علم و تاریخ صنعت» (دفاتر فلسفی چاپ ۱۹۴۷ صفحهٔ ۱۲۲). متأسفانه هنوز دوره‌ای از تاریخ ریاضی که بطور همه‌جانبه جوابگوی این طرح باشد، تهیه نشده است، اگرچه مقدمات کار و مدارک اصلی آماده است.

است، خبری بدست می‌آوریم. و البته چنین وضعی برای کتابهای عمومی تاریخ که برای دانش آموزان دبیرستانی تدوین شده، طبیعی و از لحاظ روانی قابل توجیه است. مثلاً کتابی را انتخاب کنیم که مربوط به‌تاریخ یونان باستان باشد. در چنین کتابی، ولو بطور ناچیز، می‌توان اطلاعاتی دربارهٔ مجسمه‌سازان و نویسندگان بزرگ یونان پیدا کرد. دانش آموزان از روی این کتابها دربارهٔ زندگی و کارهای آشیل، آریستوفان، فیدیاس، میرون و پراکسیتل اطلاعاتی بدست می‌آورند، ولی جستجوی نامهای اقلیدس، ارشمیدس و دموکریت در این کتابها کار عبثی است. درحالی‌که تنها آشیل، میرون و سایر هنرمندان دنیای قدیم سازندهٔ تاریخ تمدن بشری نبوده‌اند. برای تاریخ فرهنگ و تمدن بشر و برای مجموعهٔ علوم و فنون امروزی، نمی‌توان نقش کسانی مثل ارشمیدس، اقلیدس، دموکریت و آپولونیوس را فراموش کرد. به این ترتیب وضع ناراحت‌کننده‌ای به‌وجود می‌آید: درحالی‌که برای تکامل و پیشرفت همهٔ جنبه‌های زندگی امروزی، علوم ریاضی نقش اساسی و تعیین کننده دارد، کتابهای درسی تاریخ حتی نخواسته‌اند خلاصه‌ای از چگونگی پیشرفت این علم را در اختیار دانش آموزان بگذارند. دانش آموزان در درس تاریخ نمی‌توانند دلائل این امر را دریابند که چرا علوم مختلف، و درکنار آنها ریاضیات، در زندگی اجتماعی نقش اساسی و جدی داشته است.

این وضع تاریخ علوم تجربی در دورهٔ تاریخ دبیرستانی، جنبه‌های ناگوار دیگری هم دارد، قبل از همه اینگونه برداشت، پیشرفت علوم تجربی، صنعت و ریاضیات را از تکامل کلی تاریخی و از تکامل روابط اجتماعی جدا می‌کند و ریاضیات را به چیزی صوری و سطحی از لحاظ تاریخ جامعه‌های انسانی و تاریخ تمدن تبدیل می‌کند.

وقتی که ریاضیات چنین جای نمایانی را در زندگی جامعه‌های امروزی بدست آورده است، باید این حق را داشته باشد که لااقل فصلهایی از کتابهای درسی تاریخ عمومی را اشغال کند. باید ترتیبی داده شود که ریاضیات بتواند به عنوان عنصری که آموزش فیزیک، شیمی، زیست شناسی و کارهای دستی را سازمان می‌دهد، برسمیت شناخته شود.

این برخورد منفی با تاریخ ریاضیات از طرف بعضی ریاضی دانها، که

دربارهٔ آن صحبت کردیم، عمومی نیست. اکثریت مطلق ریاضی‌دانهای زمان ما و برجسته ترین نمایندگان علوم به تاریخ ریاضی، به‌عنوان عاملی که نقش اساسی در شکل‌دادن نظریه‌های ریاضی دارد، می‌نگرند. حتی بسیاری از آنها، خود مورخ علم هستند. نمونه‌هائی ذکر می‌کنیم.

همهٔ کسانی که با امور تربیتی سر و کار دارند با نام ریاضی‌دان بزرگ آلمانی فلیکس کلین، که در پایان سدهٔ گذشته و ابتدای سدهٔ حاضر می‌زیست آشنا هستند. شهرت کلین تنها بخاطر دانش او نیست، که توانسته است در خود ریاضیات به نتایج جدید و جالبی برسد، بلکه به این مناسبت هم هست که در پیشرفت آموزش اروپایی قدمهای مؤثری برداشت و در بهبود آموزش ریاضی نقشی اساسی داشته است. همچنین کلین اثر جالب و آموزنده‌ای در زمینهٔ تاریخ ریاضی دارد به نام «رسالهٔ‌ای دربارهٔ پیشرفت ریاضیات در قرن نوزدهم». گرچه این اثر در ارزشیابی دانشمندان مختلف سدهٔ نوزدهم دچار قضاوتهای ذهنی شده و تا حد زیادی بخطا رفته است، ولی کلین نشان داد که ارزش واقعی پیشرفت ریاضی را در سدهٔ گذشته بخوبی درک کرده است، قرنی که توانست دامنهٔ ریاضیات را گسترش دهد و با طرح مطالب جدید آنرا بیش از حد غنی کند.

کتاب بزرگ سه جلدی یکی دیگر از ریاضی دانها بنام ۱°. نیگه باور تحت عنوان «بحثهائی دربارهٔ تاریخ علوم ریاضی باستان» هم مشهور است. در این کتاب از تحقیقات نویسندهٔ آن دربارهٔ دانش ریاضی بابلیها گفتگو شده است که تصورات ما را دربارهٔ تکامل ریاضی در عهد باستان بکلی دگرگون می‌سازد. دربارهٔ تحقیقات نیگه باور بعداً صحبت خواهیم کرد.

آ. ن. کالموگورو تحقیق تاریخی بسیار جالبی دربارهٔ تکامل ایده‌های ریاضی برای دایرةالمعارف بزرگ شوروی نوشته است. این مقاله می‌تواند به عنوان یکی از نوشته‌های عمیق و نادری بشمار رود که از نظرگاه فلسفهٔ منطقی دربارهٔ تاریخ ریاضیات نوشته شده است.

بالاخره از کتابی که بتازگی منتشر شده است نام می‌بریم، تحت عنوان «علمی که بیدار می‌شود». این کتاب اثر وان‌دروادرن ریاضی‌دان هلندی است (که اکنون در سویس بسر می‌برد) و می‌تواند وسیلهٔ بسیار مفیدی برای معلمین ریاضی باشد.

ریاضیات علمی است که مبدأ و شروع آن در عمق تاریخ گذشتهٔ انسانی گم می‌شود. مفهوم عدد برای نخستین بار کی و چگونه پدید آمد؟ این سؤال یکی از مشکل‌ترین مسائل تاریخی است. مطلب بر سر اینست که این مفهوم در دوران قبل از تاریخ و خیلی پیش از زمانی که انسانها به نوشتن تاریخ خود پرداختند به وجود آمده است. همانطور که بعداً خواهیم دید، ما در این مورد امکانات خیلی کمی در اختیار داریم، این امکانات عبارتست ازمطالعهٔ خصوصیات زبان ما و همچنین مطالعهٔ ملتهائی که با دوران توحش خود فاصلهٔ زیادی ندارند. ولی نباید فراموش کرد که در این بررسی هم نمی‌توانیم به‌اولین مراحل پیدایش مفهوم عدد دست یابیم. هنر شمردن حتی مربوط به زمانی است که هنوز تصوری دربارهٔ عدد، به عنوان مفهوم خاص خود، وجود نداشت. به این مطلب اساسی باید توجه داشت که مفاهیم ریاضی در دوره‌ای از تکامل جامعهٔ انسانی به وجود آمد که بشر به مرحلهٔ بالائی از پیشرفت فکری رسیده بود، ولی حرکت این مفاهیم و قوام گرفتن آنها تاریخی طولانی دارد و بنوبهٔ خود در تکامل تفکرات انسانی اثر گذاشته است.

بعد از این مقدمه‌ها می‌خواهم توجه خود را به بعضی جنبه‌ها معطوف دارم تا اهمیت تاریخ ریاضیات از نظر علم معاصر بخوبی و روشنی معلوم شود. ضمناً هیچ ادعائی در این مورد ندارم که توانسته باشم بهترین جنبه‌ها و نمونه‌ها را انتخاب کنم.

روشن است که علم زمان ما فوق‌العاده وسعت گرفته است و دیگر در وضع کنونی نه تنها یکنفر قدرت این را ندارد که به همهٔ جنبه‌های مختلف و ممکن، حتی یک رشتهٔ علمی، بپردازد، بلکه از تعقیب سادهٔ همهٔ تحقیقاتی هم که در آن زمینه می‌شود عاجز است. آنگونه که افرادی مثل لئوناردو داوینچی، ل. اولر و م. و. لومونوسف بر علم زمان خود مسلط بودند، برای زمان ما دیگر بکلی غیر ممکن است. کافی است بگوئیم که هرسال بیش از ۴۰,۰۰۰ مقاله در مورد شیمی، بیش‌از ۳۰,۰۰۰ مقاله در مورد فیزیک وقریب ۱۰,۰۰۰ مقاله دربارهٔ ریاضیات در سرتاسر جهان منتشر می‌شود، تازه تمام آنچه که از مطالب علمی باید تعقیب شود به اینجا منتهی نمی‌شود، زیرا فیزیک و شیمی در بسیاری از جهات خود به صنعت و ریاضیات مربوط‌اند وریاضیات هم به صنعت و فیزیک

و شیمی و بیولوژی و غیره مربوط می‌شود. جامعهٔ بشری راه خروج از این وضع را در این دیده است که دانشمندان به رشته‌های تخصصی (و تا اندازه‌ای محدود) از دانش امروزی بپردازند. وجود تخصص برای دانشمندان و محققان اثر فوق‌العاده‌ای داشته است و یکی از دلایل غیرمستقیم تکامل برق‌آسا و طوفانی علم در همهٔ زمینه‌ها، در ۱۰۰–۱۵۰ سال اخیر بوده است. تردیدی نیست که بدون این محدودیت تخصص، نمی‌توان سرعت تکامل علم را در زمان ما حفظ کرد. ولی این تخصص، در عین حال یک خطر جدی در خود پنهان دارد: امکان بررسی علمی در مورد کل علوم از بین می‌رود، دید دقیق علمی نقصان می‌پذیرد و روابطی که بین قوانین دانشهای مختلف وجود دارد، در پردهٔ ابهام قرار می‌گیرد. تاریخ علم تا حد زیادی می‌تواند و باید این محدودیت را برطرف کند و از ناهمواری تکامل علوم جلو بگیرد.

بیفایده نیست که مفهوم تاریخ ریاضی را در زمینهٔ دیگری هم روشن کنیم. تاریخ علوم بخصوص می‌تواند درک محدود و کوته‌نظرانه نسبت به‌ریاضی را، به‌عنوان قوانین علمی، ‌‌ـ بین ببرد. ریاضی‌دان نباید ریاضیات را تنها به‌عنوان مجموعهٔ ساده‌ای از قضایا و تعاریف جداگانه، بلکه دستگاه بهم پیوسته‌ای از معرفت علمی ببیند. دانستن این امر برای آیندهٔ علم مهم است که مفاهیم ریاضی از کجا گرفته شده است، به‌علوم دیگر چه کمکی می‌تواند بکند، قدرت ریاضیات در چیست؛ بچه مناسبت علمی که ارتباط مستقیم با فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی؛ اقتصاد و صنعت ندارد، قابلیت این را دارد که بخوبی و به‌اندازهٔ کافی آنها را تشریح کند و حرکت تکاملی این پدیده‌ها را در جریان زمان بطور قانع کننده‌ای از قبل پیش‌بینی‌کند؟ تردیدی نیست‌که طرح این مسائل در زمان ما اهمیت فلسفی فوق‌العاده دارد.

اگر به‌دنیای ماشینی معاصر نظری بیندازیم، متوجه می‌شویم که حتی یک محصول جدید هم وجود ندارد، که بدون یک محاسبهٔ مقدماتی وارد در تولید شود. می‌دانیم‌که نظریه‌های ریاضی پرواز، که در اثرزحمات بسیاری ازدانشمندان و قبل از همه ژوکوسکی بوجود آمد، تا چه اندازه در تکامل هواپیما تأثیر داشت. پرتاب ماهواره‌ها نتیجهٔ کوشش دانشمندان زیادی بود، ولی بدون محاسباتی که بر مبنای ریاضیات امروزی قرار دارد، حتی تصور انجام آنهم غیر

ممکن بود. بالاخره از خودکارکردن تولید یاد می‌کنیم که در زمان ما به صورت رشته‌ای از صنعت درآمده است. برای اینکه خودکاری، مثلاً در مورد تقطیر نفت، تحقق پذیرد، قبل از هرکاری لازم است که جریان کاتالیزور کردن و آلکیلی کردن را به‌بیان ریاضی درآورد. اکنون دیگر ریاضیات نه تنها به عنوان وسیلهٔ ضروری تحقیق، بلکه ضمناً به‌عنوان عامل اساسی پیشرفت کارهای عملی شناخته شده است. حالا، پس از آنچه که بیان کردیم، بجاست که دوباره سؤال کنیم. چه دلیلی این قدرت را به ریاضیات می‌دهد که به‌کمک آن می‌توان جریان نمودهای طبیعت و سیر صنعت را توضیح داد؟

به این سؤال جوابهای زیادی داده شده است، ولی اغلب آنها قانع‌کننده نیست. به‌عنوان مثال به دو نمونه از اینگونه جوابها قناعت می‌کنیم.

در یکی از مقاله‌های گروه ریاضی‌دانهای برجستهٔ فرانسوی، که قسمتی از کارهای خودرا با نام مستعار **نیکولا بورباکی** منتشر می‌کنند این قضاوت وجود دارد: «این مطلب روشن نشده است و شاید برای همیشه به‌عنوان معمای غیرقابل حلی باقی بماند که بچه ترتیب نتیجه‌گیریهای ریاضیات مورد استفادهٔ عملی پیدا می‌کنند»*.

ریاضی‌دان مشهور دیگر فرانسوی **پی‌یر بوترو** این امر را صرفاً یک تصادف می‌داند. او چنین می‌نویسد: «اگر ریاضیات تقریباً در همهٔ موارد با شرایط تجربی تطبیق می‌کند، مربوط به ویژگیهای درونی ریاضیات نیست، بلکه تنها ناشی از اوضاع و احوال خارجی آنست. معلوم است که علم بالنسبه ساده، قابلیت تفسیر نمودهای طبیعت را دارد و این تصادف خوبی است که احتیاجی به تعارض پیدا نمی‌شود»**.

خود این نتیجه‌گیری، که امکان کاربرد ریاضی در مسائل عملی تصادفی است، نمی‌تواند تصادفی باشد. این طرز تفکر نتیجهٔ منطقی استنباط کاملاً

*) “Les grands Courants de la pensée mathématique”, Nicolas Bourbaki, L’ architecture des mathématiques, paris, 1948, p. 46.

**) Boutroux P. L’idèal scientifique des mathématiciens, Paris, 1920, P. 200.

متداولی است کــه دربارهٔ بوجود آمدن مفاهیم ریاضی و دربارهٔ تکامل قوانین و اصول ریاضیات، وجود دارد. طبق این طرز استنباط، مفاهیم ریاضی به وسیلهٔ عقل انسانی و بطور آزاد خلق شده‌اند؛ از این مفاهیم و خواص آنها، مفـاهیم جدید ریاضی طرح می‌شود و دانشمندان بدون اینکه تحت تأثیر هیچ عـامل خـارجی باشند، با ارادهٔ آزاد خود آنها را توضیح می‌دهند.

تاریخ ریاضی می‌تواند این نظرها را در هم بشکند. تاریخ ریاضی نشان می‌دهد که مفاهیم ریاضی در چه دورهٔ طولانی و عذاب‌دهنده‌ای شکل گرفته است، چگونه نتیجه‌گیریهای مبهم و مقید، تحت تـأثیر احتیاجات عملی، ابتدا به مفاهیم محدود ناقص و سپس، بـه خاطر احتیاجات بغرنج فعالیتهـای تولیدی، عملیات جنگی و علم و هنر، تکامل بعدی خود را بدست آورده است. اینگونه سیر مفاهیم ریاضی در زمــان مــا هم قطــع نشده است و تحت تأثیر احتیاجات جامعه، در همهٔ زمینه‌های مختلف آن، ادامه دارد. بنابراین بــه این نتیجه می‌رسیم که تاریخ ریاضی می‌تواند به قوام گرفتن نظریهٔ صحیح فلسفی درمورد ریاضیات، به‌روشن شدن ارتباط آن با مسائل مربوط به نمودهــای طبیعت، به‌موقعیت آن درمجموعهٔ دانش بشری کمکی جدی باشد.

در اینجا می‌خواهم مواردی را یادآوری کنم که چگــونه افکار در طول زمان پخته مـی‌شود و بـعداً به‌صـورت راهنمائی در ریاضیات درمی‌آید. امـروز کشف فکـر دستگـاه مختصـات را متعلق به **دکارت** مـی‌دانند. ایـن ادعـا در تمام کتابهای مربوط به هندسهٔ تحلیلی تکرار شده است. دربارهٔ اهمیت این مفهوم هم برای آنالیز ریاضی، نظریهٔ توابع، مکانیک و تمام علوم تجربی و صنعت هیچ تردیدی نیست.

اگــر تاریخ علم را مورد مطالعه قرار دهیم، متـوجه مـی‌شویم کـه فکـر دستگاه مختصات، تاریخی بمراتب غنـی‌تر از این دارد و بایستی آنرا در طـول قرنها و در عمق تـاریخ جستجـو کرد. میدانیم که نقاشان دورهٔ رنسانس بطـور وسیعی از شبکه‌های مربع مستطیلی برای شبیه سازی استفاده مـی‌کرده‌اند. از این گذشته، حتی در سدهٔ دوم قبل از میلاد **کلود بطلمیوس** در کارهـای خـود بـرای تعیین محل جغرافیائی از طـول و عـرض استفـاده مـی‌کرده است. آیا لازم است گفته شود که به‌کـار بردن طول و عرض چیزی جز استفاده از دستگـاه مختصات

روی سطح زمین نیست. به این ترتیب، قریب دو هزار سال قبل از دکارت، نه تنها دستگاه مختصات عرضه شده بود، بلکه در جغرافیا و نجوم مورد استفاده هم قرار می‌گرفت. حتی بنظر می‌رسد که معماران استاد مصری، هنرمندان گمنام دورهٔ سلطنت میانه، خیلی قبل از بطلمیوس، از فکر مختصات قائم استفاده می‌کرده‌اند. در یکی از مقبره‌های قدیم مصر، محلی باقیمانده است که کارهای مربوط به دیوارهای آن ناتمام‌است. روی دیوارها دستگاه محورهای‌عمود برهم وجود دارد که صفحهٔ دیوار را به مربعهائی تقسیم می‌کند. همچنین یک شکل وجود دارد که بوسیلهٔ شبکهٔ مختصات به‌قسمتهائی تقسیم شده است. استادکار برای اینکه شکل مورد نظر را روی دیوار رسم کند، با استفاده از فکر دستگاه مختصات قائم نقاط مختلف آنرا در شبکه علامت گذاشته است. همین نمونه نشان می‌دهد که اطلاع بر تاریخ علم می‌تواند به‌بشرکمک کند تا نیروی خود را صرف کشف مطالبی که بارها کشف شده است، ننماید.

در سال ۱۹۵۱، بمناسبت صد و پنجاهمین سال تولد ریاضی‌دان مشهور **م. اوستروگرادسکی**، اسناد شخصی او مورد مطالعه قرار گرفت. بین انبوه نوشته‌ها، دو قطعه کاغذ بدست آمد که بخط اوستروگرادسکی روی آنها نوشته شده بود. بررسی دقیق نوشته‌ها نشان داد که اوستروگرادسکی چند روز قبل از مرگ خود، موفق شده بود دو آلگوریتم بسیار جالب برای معرفی اعداد گنگ کشف کند، که بصورت خاصی از رشته‌های متغیری بود که به‌سرعت به تقارب نزدیک می‌شد. نظریهٔ کلی این آلگوریتمها در این یادداشتها ذکر نشده است؛ در آنها اصل فکر و مورد استفادهٔ آن در محاسبهٔ لگاریتم عدد ۱۷ طرح ریزی شده است. **ا. یا. رمز** در یکی از مقاله‌های خود، که به بررسی آلگوریتمهای اوستروگرادسکی اختصاص دارد، روشن کرده است که از بعضی جوانب، آلگوریتمهای اوستروگرادسکی از لحاظ سرعت تقارب بر آلگوریتمهای دیگر، و منجمله آلگوریتم کسرهای مسلسل، برتری دارد.

تردیدی نیست که مطالعهٔ دقیق علم گذشته، می‌تواند باز هم باعث کشف مطالب و افکاری بشود که بر معاصرین ما پوشیده است. به مناسبت پیشرفت فن محاسبهٔ جدید، دوباره مبحث آنالیز ترکیبی که در قرن هیجدهم روی آن خیلی کار شده است، اهمیت زیادی کسب کرده است. به‌این مناسبت ظاهراً لازم است

یکبار دیگر نظری به‌این جنبه از تحقیقات ریاضی بیندازیم و دوباره نتیجه‌گیریهای آن دوره را در این باره مورد مطالعه قرار دهیم. باید اطمینان داشت که مطالعهٔ دقیق میراث علمی دانشمندان گذشته، از نظر مطالبی که برای علم معاصر جالب توجه است، می‌تواند منجر به کشفیات بسیار مهمی بشود.

حالا که بعضی از ملاحظات مربوط به‌اهمیت تاریخ ریاضی را از نظر ریاضیات معاصر، از نظر درک مسائل کلی و راه تکامل آن و از نظر استنباط فلسفی آن بیان کردیم؛ می‌خواهیم به‌بعضی مسائل مربوط به آموزش بپردازیم.

معلم باید بداند که با چه تلاشهائی مفاهیم ریاضی بوجود آمده است، چگونه در مراحل اولیه، نمایشهای مادی و قابل تجسم لازم بود و چگونه‌استدلال منطقی و بدون نقص انتزاعی راه خود را باز کرد و جزو عادت شد. تاریخ ریاضی می‌تواند اشکالاتی را که جامعهٔ انسانی ضمن تکامل خود، به‌آنها برخورده است، تا حد زیادی روشن کند. تاریخ ریاضی وسیلهٔ اساسی و پرقدرتی در دست معلم است که به کمک آن می‌تواند ریاضیات دبیرستانی را به‌موضوعی دوست داشتنی و جالب تبدیل کند، بنحوی که دیگر دانش‌آموزان به‌درسهای ریاضی نه بعنوان یک کار شاق، بلکه بمنزلهٔ موضوع دلنشین و زیبائی نگاه کنند که ضمناً می‌تواند در مشکلات زندگی کمک مؤثری به‌آنها باشد.

بدون تردید، باید تاریخ ریاضی موجب تغییر جدی در محتوی ریاضیات دبیرستانی و هم در تنظیم برنامهٔ آن بشود. دورهٔ ریاضی باید خود را با نیازهای زندگی امروزی تطبیق دهد، نه‌اینکه به‌افکاری که برای اواخر قرن هیجدهم و یا اواسط قرن نوزدهم مفید بوده چسبیده باشد. گاهی وقت و نیروی زیادی در این زمینه بهدر می‌رود که روشهای مصنوعی حل گروهی از مسائل خاص را بیاموزند، به این عنوان که تصورات بچه گسترش یابد و یا خصوصیات روحی و فکری دانش‌آموز پرورش داده شود. در حقیقت همهٔ اینها بخاطر اینست که ما اسیر سنتهای گذشته هستیم. بخاطر بیاورید که در سالهای اول آموزش چه وقت زیادی برای حل مسائل مختلف و انتزاعی حساب و گروه‌بندی آنها می‌شود. پسران و دختران ۱۰ــ۱۱ ساله باید حل نمونه‌های پیچیده و مصنوعی مسائل را بخاطر بسپارند، تنها برای اینکه نباید از مبانی سادهٔ جبر استفاده کنند. و بعد، وقتی که پس از یکی دو سال دانش‌آموز با جبر آشنا می‌شود و می‌بیند که می‌توان همین

مسائل را بسادگی و بدون اشکالات معمائی حل کرد بطور طبیعی این سؤال برایش مطرح می‌شود: برای چه قبلاً این همه عذاب می‌کشیدیم، چرا قبلاً ما را بامعادلهٔ یک مجهولی درجهٔ اول آشنا نکرده بودند؟ به‌آن ترتیب چقدر آموزش ریاضی برای ما جالب‌تر وساده‌تر بود! وضع کاملاً بی‌معنی و غیرعادی است که تنها با نمونهٔ زیر قابل مقایسه است. در یک مزرعه تراکتورهای عالی و جدید موجود است، سوخت به‌اندازهٔ کافی ذخیره شده است، افرادی هم، که بتوانند از این تراکتورها استفاده کنند، وجود دارد. ولی مسئول مزرعه شخم‌زدن با تراکتور را مجاز نمی‌داند، زیرا دهقانان باید قبل از همه بشیوهٔ کار انسانهای اولیه آشنا شوند و مدتها با روش آنها زمین را شخم کنند. زمانی بود که زمینها حتی با گاوآهن شخم نمی‌شد، بلکه با کلنگ و بیل زمین را می‌کندند. پس حالا هم اجازه بدهید دهقانان یکی دو سالی از این وسیلهٔ امتحان شدهٔ قدیمی استفاده کنند و تنها بعد از این دوره گاوآهن را مورد بهره‌برداری قرار دهند. البته شما در مزارع به‌چنین مسئولینی برخورد نمی‌کنید، ولی با کمال تأسف در بین مربیها و برنامه‌نویسها از اینگونه آدمها فراوانند. اینها هنوز هم در آموزش ریاضی معتقدند که باید قبلاً و برای مدتی از کلنگ و یا چوب نوک تیز استفاده کرد! مثل اینست که در گذشته هرگز کوششی در جهت تسهیل روشهای حل مسائل قدیمی بعمل نیامده است. تاریخ ریاضی، که دربارهٔ گذشته صحبت می‌کند، می‌تواند الهام‌بخش طرز تفکرهای جدیدی در مورد آموزش بهتر و صحیح‌تر جوانان ما باشد، آموزشی که با نیازهای کشور ما و مجموعهٔ علم و صنعت معاصر ارتباط نزدیک داشته باشد.

باید این نکته را بخاطر داشت که تکامل علم و پیشرفتهای صنعتی همیشه و با بندهای متعددی به بهتر شدن آموزش مربوط است. بسیاری از دانشمندان گذشته نظریات خود را دربارهٔ تنظیم سیر آموزش و خصوصیات آن در مراحل مختلف برای ما باقی گذاشته‌اند. بخصوص نظرات **م. و. اوستروگرادسکی** ریاضی‌دان و مربی مشهور نیمهٔ اول سدهٔ نوزدهم، اهمیت خاصی دارد. در اینجا جمله‌هائی از رسالهٔ «تفکراتی دربارهٔ آموزش» را که اوستروگرادسکی با کمک **آ. بلوم** مربی پاریسی در سال ۱۸۶۰ به زبان فرانسوی نشر داده است، نقل می‌کنیم:

«برای آموزش جوانان هنوز از همان روشی استفاده می‌شود که سقراط و افلاطون، حقایق عالی اخلاقی را برای شیفتگان منطق و فلسفه و برای علاقه‌مندان سخنوری و علم کلام بیان می‌کردند...

چه کسی نمی‌داند که از ۵۰ دانش‌آموز، لااقل ۴۰ نفر برای همیشه از مباحث انتزاعی گریزان و از آموختن آنها مأیوس می‌شوند؛ مباحثی که بدون روشن کردن مفاهیم واقعی آنها به کمک نمونه‌های مربوط به زندگی عملی، در همان ابتدای کار تدریس می‌شود.

معلمین علوم قبول دارند که بطور کلی تدریس به کمک میزها وصندلیها خیلی سریعتر از آموزش به کمک دقت فکری و کوشش ذهنی به نتیجه می‌رسد.

در حقیقت در درسهای حساب، جبر و هندسه، هرگز لزوم یادگیری آنها برای زندگی عملی خاطرنشان نمی‌شود. هرگز از تاریخ علم صحبتی بمیان نمی‌آید. نظریه‌های علمی سنگین، تعریفهای خشک ونامفهوم مرتباً تدریس می‌شود، تکرار می‌شود، ولی هیچ نتیجه‌ای جز این ندارد که دانش آموزان را از علم بری کند و عدهٔ آنها را تقلیل دهد.

بنظر می‌رسد که هنوز هم‌کاهنان مصر قدیم‌اند که علم اسرارآمیز و دست‌نیافتنی را در اختیار دارند...

باید ذهن و علاقهٔ بچه را جلب کرد؛ این یکی از اساسی‌ترین مسائل مربوط به آموزش است، ما نمی‌گوئیم که باید تسلیم ذوق دانش‌آموز شد، بلکه می‌گوئیم که باید شوق او را برانگیخت».

یکی از راههای جدی برای حل مسئله‌ای که اوستروگرادسکی طرح کرده است توجه به تاریخ علم، گفتگو دربارهٔ مردان علم و ارتباط ریاضی با عمل است، ارتباطی که در تمام دوران زندگی بشر هرگز قطع نشده است.

مراحل تاریخ ریاضی

گفتیم که ریاضیات برای پیشرفت خود راهی طولانی طی کرده است. برای اینکه بتوانیم با سهولت قوانین اساسی این پیشرفت را، و نقطه‌نظرهای اصلی، که راه را برای این پیشرفت بازکرده‌اند، تشخیص دهیم، قبلاً باید مراحل اساسی تکامل ریاضیات را بخوبی از هم جدا کنیم.

این پرسش پیش می‌آید که چگونه این مراحل را تقسیم می‌کنند؛ و چه اصولی باید راهنمای این تقسیم باشد؟ آیا باید این دوره‌ها را به‌مناسبت دانشمندان برجسته‌ای تعیین کرد که مسائل زیادی در جهتهای مختلف طرح کرده‌اند و طی سالهای زیادی در مورد مسیرهای اساسی فکری، که می‌بایست درریاضیات دنبال شود، تعیین کننده بوده‌اند؟ یا اینکه باید دوره‌های مسیر تاریخی ریاضیات را به وسیلهٔ آن ملت‌هائی تعیین کرد، که در گذشته توانسته‌اند به گنجینهٔ دانش بشری ودیعهٔ قابل توجهی عرضه بدارند؟ یا شاید بتوان دوره‌های مختلف ریاضی را با توجه به‌تقسیم تاریخ جامعهٔ بشری براساس شکلهای مختلف تولید اقتصادی، منطبق دانست؟ در اینصورت باید از ریاضیات جامعهٔ ابتدائی، دوران بردگی، فئودالیسم، بورژوازی و دوران سوسیالیسم صحبت کنیم.

ولی روشن است که هیچیک ازسه طریقهٔ مذکور به اندازهٔ کافی رضایت‌بخش نیستند. در حقیقت، اگر دوره‌های مختلف ریاضی را مثلاً با روش اخیر معین کرده باشیم، طبعاً این سؤال پیش می‌آید، اختلاف ریاضیات دوران بردگی و جامعهٔ فئودالی در چیست؟ و یا چه مرزی ریاضیات رژیم سرمایه‌داری را از ریاضیات جامعهٔ سوسیالیستی جدا می‌کند؟ بخصوص سؤال اخیر اهمیت زیادی دارد، زیرا هر دو شکل مختلف اجتماعی سالهای زیادی است که درکنار هم وجود دارند. هرگونه مطالعهٔ دقیقی، نمی‌تواند در خصوصیت اکتشافات ریاضی و موضوع مورد مطالعهٔ دانشمندان اتحاد شوروی و مثلاً فرانسه یا آلمان، اختلاف اصولی پیدا کند. از این گذشته ریاضی‌دانهای اتحاد شوروی بطور وسیعی از نتیجهٔ جستجوهای دانشمندان امریکائی و اروپای غربی درکارهای خود استفاده می‌کنند، همانطور که دانشمندان دنیای سرمایه‌داری هم اغلب به کشفیات دانشمندان شوروی تکیه می‌کنند و مسیرهای فکری آن‌ها را دنبال می‌کنند.

این روشهای تقسیم مراحل ریاضی، از این جهت رضایت‌بخش نیست که یا براساس جنبه‌های خاص و غیراساسی تکامل علوم قرار گرفته‌اند و یا از خصوصیات درونی ریاضیات، که بسیار اساسی است، منحرف شده‌اند. وقتی که‌ما از تاریخ ریاضیات و مراحل آن صحبت می‌کنیم، درنظر اول باید به‌شرایط اساسی مربوط به‌تکامل خود ریاضیات بپردازیم و سپس ارتباط این شرایط و علل تأثیر

آنها را در کیفیاتی ازنوع : شرایط اقتصادی، روابط اجتماعی، تکامل صنعت و علوم تجربی، دیدهای فلسفی مختلف و غیره مورد مطالعه قرار دهیم...

تاریخ ریاضیات را بهچهار دورهٔ مختلف می‌توان تقسیم کرد:

۱ــ دورهٔ تولد ریاضیات؛

۲ــ دورهٔ ریاضیات مقدماتی؛

۳ــ دورهٔ ریاضیات با کمیتهای متغیر؛

۴ــ و بالاخره دورهٔ ریاضیات معاصر.

شروع دورهٔ اول در اعماق قرنهای گذشته گم می‌شود. تردیدی نیست که مفاهیم اصلی ریاضیات با طلوع انسانیت همراه است: تصور بیشتر و کمتر، تساوی و فاصلهٔ کوتاهتر، حتی در مراحل ابتدائی بشر اولیه بصورت ناآگاهانه وجود داشته است. نیازهای زندگی اقتصادی وادار می‌کرد که هنر محاسبهٔ اندازه‌گیری طول، سطح و حجم تکمیل شود. ذخیرهٔ اطلاعاتی که رویهم انباشته می‌شد، مرتباً زیاد می‌شد، ولی این هنوز حکم یک مجموعهٔ پراکنده را داشت و به‌عنوان عناصر رشتهٔ مستقلی از دانش، که موضوع خاص و روش خاصی برای بررسی داشته باشد، احساس نمی‌شد. می‌توان دورهٔ تولد ریاضیات را تا ۵ــ۶ سدهٔ قبل از سالهای میلادی دانست. ولی این یک تاریخ مشروط است، زیرا بسیاری از ملت‌ها خیلی دیرتر در ادراکات ریاضی خود، در این مرحلهٔ اول تکامل قرار گرفته‌اند (و یا هنوز قرار می‌گیرند). در یکی از مقاله‌هائی که بعداً خواهید دید از کیفیت خاص محاسبه‌ای صحبت شده است که بین بعضی از ملت‌ها، در قرن نوزده و اوایل قرن بیستم مشاهده شده است.

در این دوره پی‌ریزی ریاضیات مقدماتی انجام گرفته است، انسان‌های ناشناخته‌ای با کار خلاقهٔ خود و براساس تجربه‌های بسیار مسائلی را طرح‌کردند و به گنجینهٔ دانش بشری افزودند. این آفریننده‌های بی‌نام دانش بشری تحت تأثیر زندگی اقتصادی به کشفیات خود جهت دادند، بتدریج قابلیت انجام اعمال حساب را روی اعداد صحیح بدست آوردند، سپس به مطالعهٔ عددهای کسری راهنمائی شدند و شروع به محاسبهٔ صحیح حجم اجسامی کردند که کم و بیش بغرنج بود. درهمین دوره وسائل کمکی برای ساده کردن محاسبات (برای اشیاء و یا حساب متقابل فعالیت‌های تجارتی) اختراع شد. اگر چه این اختراعات از

نظر ما خیلی ساده است و اگرچه دانش بشری در این دوره خیلی ابتدائی است، ولی همین قدمهای اولیه پایه‌های اساسی پیشرفت فرهنگ انسانی را ریخت. اگر بشر امروز دارای قدرت و دانش فوق‌العاده‌ای است، تنها به‌این مناسبت است که نسلهای متوالی، با تکیه به‌تجربیات و اکتشافات نسلهای قبلی، توانستند سطح دانش خود را مرتباً بالا ببرند.

روشن است که برای دانش ریاضی در این دورهٔ قدیمی، بیش از همه مطالعهٔ یادداشتها و صورت حسابهای مربوط به زندگی اقتصادی آن زمان،اهمیت دارد.

دورهٔ دوم، همانطور که گفتیم، بطور طبیعی دورهٔ ریاضیات مقدماتی نامیده می‌شود. آنچه را که ما امروز، بطور کلی، در مدارس متوسطه یاد می‌گیریم، در این دوره شکل گرفته است، ولی آنچه که بطور اساسی، ریاضیات این دوره را از گذشته متمایز می‌کند اینست که مفاهیم ریاضی بصورت علمی درآمدند. بخصوص قرن‌های ششم تا پنجم قبل از میلاد را می‌توان شروع تنظیم ریاضیات به‌عنوان علمی که موضوع مخصوص بخود و روش بررسی خاص خود دارد، بحساب آورد. ریاضیات از مجموعهٔ پراکندهٔ «نسخه‌هائی» که برای زندگی معیشتی مورد استفاده قرار می‌گرفت، به دستگاه معرفت علمی تبدیل شد. در این دوره هندسه، اساس نظریهٔ اعداد، جبر، مثلثات مسطحه و کروی به نظم درآمد. حقایق ریاضی، به‌سختی و بتدریج، خود را از قید تجربه‌آزاد می‌کردند و صحت آنها، نه در مشاهده و تحقیق روی نمونه‌های خاص، بلکه با روش‌های منطقی اثبات و در مورد همهٔ حالتهای ممکن، تأیید می‌شد.

پایان دورهٔ دوم را باید ابتدای قرن هفدهم دانست، زمانی که دیگر بخاطر احتیاج به مطالعهٔ حرکت و تغییر از نظر ریاضی، افکار و مفاهیم جدیدی در ریاضیات بوجود آمد. بدون تردید بررسی مفاهیم جدید به مسائلی نزدیک بود که بطور جدی در مقابل جامعهٔ بشری طرح شده بود. اگر بخاطر آوریم که این دوره، زمان اکتشافات بزرگ جغرافیائی و تکامل فوق‌العادهٔ دریانوردی و توجه بیش از حد به‌اطلاعات نجومی است، اگر بخاطر بیاوریم که همین دوره، زمان رشد سریع تولید کارگاهی و تکامل فوق‌العادهٔ توپخانه است؛ بسادگی متقاعد می‌شویم که همهٔ مسائلی که به این مناسبات طرح می‌شد، نمی‌توانست براساس

جبر و هندسهٔ مقدماتی حل شود. به‌افکار و مفاهیم جدیدی نیاز بود که در حقیقت به وجود هم آمدند. این افکار در نقاط مختلفی از قارهٔ اروپا و بخصوص در کشورهائی که صنعت و تجارت رونق بیشتری گرفته بود، پیدا شد. به این ترتیب شرایط ظهور دورهٔ سوم ریاضیات فراهم شد.

دورهٔ ریاضیات با کمیتهای متغیر به این ترتیب مشخص می‌شود که ریاضیات به‌مطالعهٔ جریانها (پروسه‌ها) می‌پردازد. در نظر اول، ریاضیات این دوره مربوط به تحقیق و بررسی کمیتهای متغیر یک تابع است. فکر محورهای مختصات بطور اساسی به‌روش هندسی تبدیل شدکه بصورت روابط تابعی تجلی کرده است. به‌رشته‌های ریاضی، که درسابق وجود داشت، هندسهٔ تحلیلی و آنالیز ریاضی هم اضافه شد. آموزش تابع، و بنابراین به حساب آخر مطالعهٔ کمیت‌های متغیر، در سرفصل ریاضیات قرار گرفت. بررسی شکلهای فضائی هم بکمک آنالیز ریاضی شروع شد. ولی در هرحال ریاضیات از حدود فضای واقعی سه بعدی خارج نشد. همچنین قوانین کمی تنها به وسیلهٔ کمیت‌هائی بیان می‌شد که مقادیر عددی را قبول می‌کردند. چه مقادیر متغیرها و چه مقادیر توابع تنها می‌توانستند مقادیر عددی را قبول کنند.

روشن است که در دورهٔ سوم نه‌تنها برای خود ریاضیات مرحلهٔ تکاملی بزرگی بود، بلکه برای تعبیر ریاضی پدیده‌های طبیعت و هم برای پیشرفت صنعت خیلی بارور و سازنده بود.

با تکیه بر پیشرفت آنالیز ریاضی، موفق شدند قوانین اساسی فیزیک‌را بصورت ریاضی بیان کنند، از راه محاسبه به‌کشفیات جدیدی در مورد پدیده‌های فیزیکی رسیدند، که تا آن زمان بطریق تجربه مشاهده نشده بود. به‌عنوان یکی از نمونه‌های درخشان قدرت آنالیز ریاضی و شناخت پدیده‌های طبیعت، کشف سیارهٔ جدید منظومهٔ شمسی است که تقریباً در یک زمان بوسیلهٔ دو منجم: **آدامس** و **لوریه** انجام شد. بعدها، در ۱۹۳۰، از همین راه پلوتن سیارهٔ نهم منظومهٔ شمسی هم کشف شد که مدار آن قبلاً در سال ۱۸۱۵ بوسیلهٔ **پ.لوول** منجم آمریکائی محاسبه شده بود.

ولی قرن نوزدهم تنها قرن پیشرفت کمی ریاضیات نبود، تنها امکانات جدید مطالعهٔ پدیده‌های طبیعت را از نقطه‌نظر ریاضی بهمراه نداشت؛ بلکه تأثیر

جدی و متقابل علوم تجربی و ریاضیات در یکدیگر، منجر به تغییر کیفی خود ریاضیات شد. به‌مناسبت این تغییرات در نیمهٔ دوم قرن گذشته، ریاضیات چهرهٔ خود را چنان بطور اساسی و جدی تغییر داد که، دیگر به آستانهٔ مرحلهٔ جدید چهارم خود رسیده بود.

چه خطوطی این مرحلهٔ چهارم را از سه مرحلهٔ قبل جدا می‌کند؟ قبل از همه، موضوع مورد مطالعهٔ ریاضیات بی‌اندازه وسعت گرفته است. ریاضیات علاوه برکمیتهای عددی، کمیتهای دیگری از نوع بردارها، تانسورها و سپینورها را هم مورد استفاده قرار می‌دهد. همراه با فضای سه بعدی اقلیدسی، به مطالعهٔ فضاها و موضوعهای هندسی هم می‌پردازد، که بکلی طبیعت دیگری دارند. صحت منطقی‌هندسه‌های غیر اقلیدسی، مثل هندسهٔ اقلیدسی، به ثبوت رسیده است. فضاهای چند بعدی و سپس فضای n بعدی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و تا حد زیادی، این موضوعهای جدید را فیزیک در مقابل ریاضیات قرار داده است. محتوی جبر بطور کاملاً اساسی تغییر کرده است. جبر، از علمی که روش‌های حل معادلات جبری را مطالعه می‌کرد، به‌علمی تبدیل شده است که دستگاههای اشیاء را با طبایع مختلف مورد مطالعه قرار می‌دهد و درمورد این اشیاء اعمالی را انجام می‌دهد، که از لحاظ خصوصیت، بی‌شباهت به عملیات جمع و ضرب نیست.

تمام سبک و شیوهٔ تفکر ریاضی دگرگون شده است. و ریاضی‌دان‌ها باز هم مطالبی دربارهٔ لزوم توسعهٔ دایرهٔ این مفاهیم (مفاهیمی که در حوزهٔ عمل ریاضی قرار گرفته است) طرح می‌کنند. اگر قبلاً صدها سال طول می‌کشید تا عددهای منفی یا مختلط به تابعیت پذیرفته شوند، امروز بهراندازه که لازم باشد، دستگاههای جبری با کیفیت‌های مختلف، ساخته می‌شود. در نمونهٔ هندسهٔ لباچوسکی، امکانات بوجود آوردن نظریه‌های ریاضی جدیدی بطریق کاملاً انتزاعی، مطرح است. با وجود این باقطعیت روشن شده استکه نظریهٔ ریاضی، که به‌این ترتیب ساخته می‌شود، قابلیت انعطاف فوق‌العاده‌ای برای توصیف پدیده‌های طبیعت دارد. روشن شده است که بهمان اندازه که ریاضیات بسمت تجرد می‌رود، بهمان اندازه که ظاهراً از مشاهدهٔ مستقیم پدیده‌های یگانهٔ طبیعت دور می‌شود، بهمان اندازه هم قدرت کسب می‌کند و امکان بیشتری برای مطالعهٔ

مجموعهٔ خواصی از طبیعت بدست می‌آورد.

به‌این ترتیب، در عین حال که محتوی ریاضیات توسعه یافته و در جهت مفاهیم جدیدی تکامل پیدا کرده است بطور فوق‌العاده‌ای عمیق‌تر شده است و ارتباط همه جانبه و بی‌نظیری با علوم تجربی و موارد عملی پیدا کرده است، به عنوان مثال می‌توان از خودکار کردن ادارهٔ مؤسسات تولیدی نام برد که با استفادهٔ وسیع از ماشینهای حساب الکترونی (که براساس توضیح ریاضی و منطقی سیر صنعت ساخته شده‌اند) پیشرفت فوق‌العاده‌ای کرده است.

حال‌که با نظرکلی و کوتاهی تاریخ ریاضیات را مورد بررسی قراردادیم، می‌توانیم متوجه شویم که بین پیشرفت ریاضیات و تحولات شکل اقتصادی و اجتماعی، رابطهٔ مستقیمی وجود ندارد. می‌توان بحساب آورد که در جریان صدها سال، شکل جدید اجتماعی، از تکامل علم جلو گرفت و آنرا به قهقرا برد. کافی است بحران فکری علمی را در سال‌های قرون وسطی و حاکمیت مسیحیت بخاطر آوریم. موفقیتهای علم یونانی بکلی فراموش شد. بعداز پیشرفت استثنائی ریاضیات در یونان قدیم، قرن‌هائی پدید آمد که در اروپا بسختی می‌شد کسی را پیدا کرد که از عهدهٔ انجام چهار عمل اصلی حساب برآید.

ولی تأثیر تکامل جامعه و تغییرات روابط تولیدی در پیشرفت علوم را نمی‌شود بطور ساده، و شبیه آنچه را که در اینجا در مورد توقف تکامل علوم و بوجود آمدن کیفیت جدیدی در معرفت بشری ذکر کردیم، در نظر گرفت. میدانیم که ریاضیات همراه با طبقات از بین نمی‌رود و با نابودی یک رژیم اجتماعی و بقدرت رسیدن یک رژیم دیگر، نابود نمی‌شود و یا تغییر ماهیت نمی‌دهد. میدانیم که قواعد حساب توانسته است بهمهٔ اشکال مختلف اجتماعی و بهمهٔ طبقات خدمت کند و در خدمت جامعهٔ سوسیالیستی هم قرار گرفته است. بهمین ترتیب حساب فاضله و جامعه (دیفرانسیل و انتگرال) به یک اندازه به رژیمهای سرمایه‌داری و سوسیالسم خدمت می‌کند. این تأثیر بکلی به‌وجه دیگری وجود دارد. هرشکل‌جدید اجتماعی با آرزوهای جدید علمی و با نقطه‌نظرهای جدیدی نسبت به زندگی اجتماعی و هدف آن، همراه است. به‌این مناسبت تصور دربارهٔ موضوع علوم تغییر می‌کند، سمت تازه‌ای برای بررسیهای علمی پیدا می‌شود و در مقابل قوانین علمی، مسائل جدیدی قرار می‌دهد.

لازم است که دوباره شرط تقسیم تاریخ ریاضی را، به‌مراحل مختلف، خاطرنشان کنیم. در حقیقت بررسیهای مربوط به ریاضیات مقدماتی حتی بعدها و در بحبوحهٔ مرحلهٔ سوم ادامه داشت. این بررسیها حتی امروز هم قطع نشده است و مسلماً در آینده هم ادامه خواهد داشت. از طرف دیگر در کارهای **ارشمیدس** (سدهٔ سوم قبل از میلاد) نمونهٔ کامل شروع حساب انتگرال وجود دارد، ولی این مطلب بمعنای آن نیست که ما شروع مرحلهٔ سوم را از زمان ارشمیدس بدانیم، زیرا ریاضیات یونانی، در مجموع، خیلی دور از آنالیز ریاضی بود و بخصوص شرایط مادی تکامل جامعه نمی‌توانست مسائل مورد نیاز آنالیز ریاضی را در مقابل آن قرار دهد. تقسیم تاریخ ریاضیات به مراحل مختلف، یک تصور کلی دربارهٔ قوانین اصلی تکامل ریاضیات و رهنمونهای کلی مفاهیم آن در دورانهای مختلف موجودیت آن، بما می‌دهد. این تقسیم‌بندی وسیله‌ای است برای درک خطوط کلی تکامل ریاضیات از یک پله به پلهٔ بعدی، و اینکه هریک از این پله‌ها بر پلهٔ قبلی تکیه دارد و ضمناً شرایط لازم را برای بوجود آمدن پلهٔ بعدی فراهم می‌سازد. کشفیات جداگانهٔ دانشمندان، که باعث پیشرفت علم می‌شود، مؤید وضعی است که ذکر کردیم.

حتی **لایبنیتس** هم دربارهٔ اهمیت مطالعهٔ تاریخ علوم برای «هنرکشف کردن» اشاره‌هائی دارد. در یکی از نوشته‌های او، که بعد از مرگش چاپ شد، سطور زیر دیده می‌شود: «این مطلب بسیار جالب است که بتوانم منشاء اصلی کشفیات مهم را پیدا کنیم، بخصوص کشفیاتی که با قدرت تفکر، و نه بطور اتفاقی انجام گرفته‌اند. تاریخ نه‌تنها از این جهت جالب است که پاداش هرکسی را به اندازهٔ خودش می‌دهد و دیگران را تشویق می‌کند که به‌این جمع اضافه شوند، بلکه بیش از همه این اهمیت را دارد که‌آشنائی با روشهای مربوط به نمونه‌های مهم در تکامل هنر کشف کردن، نقش اساسی دارد»*. به این اعتقاد لایبنیتس بخصوص در زمان ما، باید تکیه کرد، زیرا حالا در مقابل تمام افراد جامعه این توقع وجود دارد که خصوصیت و توانائی «هنر کشف کردن» را داشته باشند.

---

*) Leibnitz, Mathematishe Schriften, B. V, Halle, 1858, (S. 392)

در خاتمه متذکر می‌شویم که تاریخ ریاضی مدتهاست که موجودیت خود را به کرسی نشانده است. اولین تاریخ هندسه در سدهٔ چهارم قبل‌از میلاد بوسیلهٔ **اودموس‌رودسی** شاگرد **ارسطو** نوشته شده است. لایبنیتس رساله‌ای دربارهٔ حساب دیفرانسیل نوشت. در اواسط سدهٔ هیجدهم (۱۷۵۸) **مونتوکلا** تاریخ ریاضیات را در دو جلد تنظیم کرد. از این زمان به بعد دیگر تاریخ ریاضیات به عنوان موضوعی که بررسی آن مورد علاقهٔ بسیاری بود، درآمد. بخصوص، هر دانشمندی در مورد کارهای مربوط خودش بطور منظم به بررسیهای تاریخی توجه می‌کرد، زیرا می‌خواست جای تفکرات و نوآوریهای خودش را در بین اطلاعاتی که بطور انباشته وجود داشت، پیدا کند. تا حد زیادی تاریخ ریاضی مورد علاقهٔ معلمین هم قرار گرفت، زیرا از این راه نه فقط می‌توانستند مجموعهٔ اطلاعاتی را در اختیار شاگردان خود بگذارند، بلکه به این وسیله می‌شد برای تنظیم مباحثی که در نوآوریهای آینده و پیشرفت فرهنگ انسانی مؤثر بود، راهی پیدا کنند.

۲ گامهای نخستین در تکامل شمار

ب. و. گنه‌دنکو

روشن است که یکی از قدیمی‌ترین و اساسی‌ترین مفاهیم در ریاضی، مفهوم عدد مثبت و صحیح است و تا زمانی که بشر وجود دارد اهمیت این مفهوم بجای خود باقی خواهد بود. مفهوم عدد هم، همچون همهٔ مفاهیم دیگر ریاضی در جریان مبارزهٔ انسان با طبیعت و در جریان کار و فعالیت انسان برای زندگی قوام گرفته است.

از قدیم‌الایام و حتی تا سدهٔ نوزدهم میلادی، بسیاری از مؤلفین، اختراع عدد را به خدا، یا یک نابغه و فیلسوف بزرگ قدیم نسبت می‌دادند، این جملهٔ **کرونکر** دانشمند بزرگ جبر مشهور است که می‌گفت:

«اعداد صحیح را خدای بزرگ آفرید، ولی بقیهٔ اعداد ساختهٔ دست بشر است».

ما با قسمت اخیر بیان او کاملاً موافقیم، ولی مجبوریم که قسمت اول گفتهٔ او را تصحیح کنیم و به وجود آمدن عدد صحیح را هم به‌حساب کار و فکر بشر بگذاریم.

نوشته‌های قدیمی ریاضی حتی تا قرن هیجدهم، اختراع حساب را به «عقل کل فیلسوف قدیمی» یا «فیثاغورث نابغهٔ یونان قدیم» و غیره نسبت می‌دادند. **ماگنیتسکی** نویسندهٔ اولین کتابهای درسی روسی، در کتاب مشهور خود بنام «حساب» از فیثاغورث بعنوان مخترع و پایه‌گذار این علم نام می‌برد.

در افسانه‌های زیبای یونان قدیم، اختراع عدد صحیح به **پرومته** نسبت داده شده است. در این باره بخصوص در تراژدی **آشیل** «پرومتهٔ زنجیر شده» صحبت شده است. در مجلس دوم تراژدی، پرومته خطاب به **اوکه‌آنید** پیر، که با او همدردی می‌کند، می‌گوید:

«... از رنجهای آدمیان فانی بشنوید که درآغاز
گروهی درمانده بودند
من به‌آنان آموختم که بیندیشند و خرد را بکار گیرند...
و سپس کاربرد اعداد را که سرآمد دانستنیهاست...
به آنها نمودم...»*

همهٔ این افسانه‌ها زیبا و دلنشین‌اند واگرآنهارا بعنوان حقایق بپذیریم، از هرگونه تحقیق و جستجوی دقیق و علمی دربارهٔ جمع‌آوری جزء جزء حقایق و مدارک دربارهٔ گامهای اولیه‌ای که بشر در راه تکامل مفهوم عدد برداشته است، معاف می‌شویم. ولی ما راه دیگری را انتخاب می‌کنیم، راهی که پیمودن آن دشوارتر است ولی ما را به واقعیت نزدیک می‌کند: ابتدا ریشه و بنیان مفاهیم ریاضی را در کارهای روزانهٔ بشر اولیه جستجو می‌کنیم. در این مورد دچار مشکلات فراوانی هستیم، زیرا از دورانی که مفهوم عدد صحیح شکل می‌گرفت هیچگونه اثر نوشته شده‌ای بما نرسیده است، و در آن زمانی هم که دیگر بشر برای بازماندگان خود آثار نوشتنی بجا گذاشت از لحاظ هنر شمردن، به اندازهٔ کافی به کمال رسیده بود.

با این ترتیب علم ناچار است برای نتیجه‌گیری، از مدارک غیر مستقیم استفاده کند. این مدارک چه هستند؟ قبل از همه نژادشناسی است! زیرا با مطالعهٔ فرهنگ ملتهائی، که بنا بر تقسیم‌بندی **ف. انگلس** در دوران توحش بسر می‌برند، می‌توان دربارهٔ مراحل تکامل ملتهای دیگر نیز قضاوت کرد. منبع دیگر تحقیق زبان است که نه‌تنها وسیلهٔ مراودهٔ عمومی است، بلکه بازمانده‌ای از

*) از ترجمهٔ فارسی «پرومته در زنجیر» صفحهٔ ۲۹ چاپ اندیشه، ترجمهٔ «شاهرخ مسکوب».

فعالیتهای معنوی ملتهای گذشته هم می‌باشد. در زبان و در اختصاصات دستوری آن، اطلاعات گرانبهائی حفظ شده است که تا حدی ما را به‌طرز شمردن مردم اولیه و اینکه چگونه به‌شمارش امروزی رسیده‌ایم، راهنمائی می‌کند.

جای تأسف است که لشکرکشیها و سیاست به‌آتش و خون کشیدن، تقریباً بطور کامل آثار محلی و ملی مردم شمال و جنوب امریکا، پولینزی، افریقا و استرالیا را به‌نابودی کشید. موارد بسیاری را ذکر کرده‌اند که تمامی یک ملت بطور کامل قتل عام شده است. در این میان، نقش مبلغین مسیحی هم فوق‌العاده تأثرانگیز است: آنها اغلب دستور می‌دادند که تمام آثار مادی فرهنگ ملتها نابود شود، مردم را باجبار مسیحی می‌کردند و صفحاتی از آثار آنها را که‌مربوط به‌تاریخ نیاگان آنها بود از بین می‌بردند. در نتیجه امروز تنها اطلاعات ناقص و پراکنده‌ای از این دوران بسیار جالب تاریخی به ما رسیده است. با وجود این، اطلاعاتی که به‌وسیلهٔ سیاحان در جریان سده‌های هجده و نوزده جمع‌آوری شده است (و البته زیاد نیست)، اهمیت فوق‌العاده‌ای در مورد تاریخ علم دارد و زمینهٔ اصلی کار را برای ترسیم طرح تاریخی و بوجود آمدن مفهوم عدد صحیح در اختیار ما می‌گذارد.

قبل از همه روشن شده است که بسیاری از قبایل می‌توانستند حساب کنند، حتی بدون اینکه اسامی خاصی برای اعداد مربوط داشته باشند. طبق اطلاعاتی که بوسیلهٔ **ایلماپار** کاشف مشهور قطب (۱۷۹۰–۱۸۵۵) به‌ما رسیده است، در آنزمان اسکیموها، اگر بیش از سه فرزند داشتند، نمی‌توانستند آنها را بشمارند. با وجود این اگر یکی از فرزندانشان غایب بود متوجه می‌شدند، یعنی‌بدون اینکه برای هریک از آنها نشانهٔ خاص جداگانه‌ای داشته باشند، می‌توانستند حساب آنها را نگه دارند.

همینطور آنها سگهای زیادی داشتند، البته نمی‌توانستند تعداد آنها را نام ببرند ولی می‌توانستند شرح کاملی دربارهٔ هریک از آنها بیان دارند: سگی که زمستان قحطی بدنیا آمد، سگ سفید با لکه‌های سیاه و غیره...

از قبایل **آبی‌پون**، که بین رودخانه‌های **ریو برمه‌خو** و **ریوسالادو** زندگی می‌کردند و در نتیجهٔ سیاست مستعمراتی اسپانیا بکلی نابود شده‌اند، داستانهای زیادی از زبان سیاحان باقی مانده است. یکی از این سیاحان می‌نویسد که در

زبان این قوم تنها برای اعداد یک و دو و سه، نامی وجود داشته است. با وجود این وقتی که یک «آبی‌پون» برزین می‌نشست و سگهای متعدد خود را برای شکار جمع می‌کرد، اگر متوجه می‌شد که یکی از سگها نیست، بلافاصله شروع به‌جستجوی آن می‌کرد.

در این مرحله از تکامل، عدد بخودی خود و بعنوان یک مفهوم مستقل درک نمی‌شود، بلکه همراه با سایر خواصی است که مربوط به خصوصیات کیفی اشیاء تشکیل‌دهندهٔ مجموعه است.

طبیعی است‌که شمردن اشیاء و مقایسهٔ تعداد مجموعه‌های مختلفی ازاشیاء، کار بسیار دشواری است. اطلاعات پراکنده‌ای که در آثار مؤلفین تمدنهای اولیه وجود دارد، این ادعای ما را ثابت می‌کند که عمل شمارش برای اقوام اولیه مسئلهٔ بسیار بغرنجی بوده است‌که هر وقت به‌آن می‌پرداختند برایشان فوق‌العاده ملال‌انگیز و خسته کننده بود.

ك. شتاینن، سیاح و نژادشناس مشهور، نمونهٔ بسیار آموزنده‌ای در این مورد نقل می‌کند، او در حدود سالهای هشتاد سدهٔ گذشته در عمق جنگلهای **آمازون** به قبیلهٔ **باکاءیر** برخورد کرد که از لحاظ تکامل در سطح پائینی قرار داشتند. او بارها از بومیان خواسته بود که ۱۰ دانه را بشمارند. «آنها به‌کندی ولی صحیح تا شش دانه را می‌شمردند، ولی برای شمردن دانه‌های هفتم و هشتم با ناراحتی متوقف می‌شدند. نشاط خود را از دست می‌دادند، هاج و واج به اطراف خود نگاه می‌کردند، از دردسری که دچار شده بودند غرغر می‌کردند و بالاخره هم یا از جواب طفره می‌رفتند و یا پا بفرار می‌گذاشتند».

در یادداشتهای روزانه و آثار **میکلوخو ـ ماکلای** مشاهدات جالبی دربارهٔ شمار اعداد، مربوط به بومیان گینهٔ نو، وجود دارد. وقتی که بومیها پرسیدند: کشتی کی خواهد آمد؟ ماکلای نتوانست جوابی بدهد. ولی «فکر کردم موقع آنست که ببینم بومیها چگونه میشمارند، چند نوار کاغذ برداشتم و آنها را از طرف عرض بریدم و به‌قطعات کوچکتری تبدیل کردم. خودم نفهمیدم که چند قطعه بریدم ولی مشتی از آنها را بیکی از بومیها دادم و گفتم هرکاغذ علامت ۲ روز است. تمام جمعیت بومی را دوره کرد و او با کمک انگشتانش شروع به شمردن کرد، منتهی مثل اینکه ناراحت بود و یا لااقل دیگران اینطور نتیجه

گرفتند که او نمی‌تواند بشمارد و قطعه کاغذها را از اوگرفتند و به دیگری دادند. کسی که کاغذهای بریده را گرفت با غرور خاصی، جائی نشست و یکنفر را هم به کمک طلبید و شروع کرد به شمردن. اولی قطعات کاغذ را روی زانویش می‌چید و برای هریک تکرار می‌کرد: «ناره، ناره» (یک)؛ دومی کلمه «ناره»را تکرار می‌کرد و همراه با آن یکی از انگشتان خود را می‌بست. اول انگشتان یک دست و سپس انگشتان دست دوم خود را. وقتی که به‌ده رسید و همهٔ انگشتان دو دست او بسته شد، هر دو مشت بستهٔ خود را تا زانو پائین آورد و به صدای بلند گفت: «دو دست»، در همین موقع نفر سوم یکی از انگشتان خود را خم کرد و سپس برای ده کاغذ دوم یک انگشت دیگر و برای دههٔ سوم انگشت سوم خود را هم بست. تعداد بقیهٔ کاغذها به ده نمی‌رسید و آنها را به کناری گذاشتند. بنظر می‌رسید که کار شمردن تمام شده است، ولی من آرامش آنها را بهم زدم: یک قطعه کاغذ برداشتم دو انگشت خود را نشان دادم و گفتم: «بوم، بوم» (روز، روز). همهمه‌ای به وجود آمد، ولی مسئله را باین ترتیب حل کردند که قطعات کاغذ را با دقت در برگ درخت نان پیچیدند تا در ده، دوباره آنهارا بشمارند».

به‌این ترتیب می‌بینیم‌که مهارت در شمردن مربوط به وجود اسامی خاصی برای اعداد و یا حتی وجود علامتهائی برای ارقام نیست.

تشکیل اعداد را باید از مراحل بالای تکامل شمار دانست. مدتها قبل از آنکه اسامی خاصی برای اعداد بوجود آید، برای بیان تعدادی از هر شیء معین، اسامی خاصی وجود داشت. معلوم شده است که نزد بعضی از ملل افریقائی برای هریک از موارد: ۳ گاو، ۳ درخت، ۳ جنگ و غیره‌نام بخصوصی وجود دارد. و یا مثلاً بعضی از قبایل غرب **کانادا** که اسمی برای سه ندارند و برای سه شیء اسامی مختلفی بکار می‌برند: «تخه» ــ سه چیز، «تخانه» ــ سه برگ، «تخات» ــ سه مرتبه، «تخاتوئن» ــ در سه جا و غیره. بومیان **فلوریدا** برای ده تخم مرغ می‌گویند«ناـکوآ» و برای ۱۰ سبد می‌گویند «ناـبانارا»، ولی به‌طور جداگانه برای عدد مجرد ۱۰ از کلمهٔ «نا» استفاده نمی‌کنند و اصلاً برای عدد ده، نامی ندارند.

گمان می‌رود که خصوصیات شمار، که بالاخره منجر به‌نامگذاریهای خاص

شده است، دقیقاً به اشیائــی ارتباط پیدا می‌کند که با کمک آنهــا شمار انجام می‌گرفته است. روشن است که این اشیاء، یعنی وسائل کمکی شمار، از بین آنچه که به‌انسان نزدیکتر است و معمولاً اعضاء بدن، انتخاب میشده است و ما همین حقیقت را مثلاً در مطالبی که از **میکلوخو-ماکلای** نقل کردیم، دیدیم. در آنجا، بومیها از انگشتان دست خود استفاده می‌کردند. این مورد منحصر بفرد نیست و ازنوع آن خیلی زیاد می‌توان پیدا کرد. **فردریك انگلس** دراین باره می‌گوید:*

«مفاهیم عدد و شکـل از جائی جز از جهــان واقعی گرفته نشده است، ده انگشت که انسان شمردن، یعنی نخستین عمل حســاب را روی آنهــا یاد گرفت، همه چیزی هست جز محصولی که مخلوق خود فکر باشد. برای شمردن، نه‌تنها باید اشیائی داشته باشیم که آنها را بشماریم، بلکه باید این استعداد را هم داشته باشیم که ضمن بررسی این اشیاء، هر خاصیت دیگری بجز شمار را از آن منتزع کنیم و این استعداد هم درنتیجهٔ تکامل تاریخی طولانی که متکی بر تجربه باشد، بدست می‌آید».

بعنوان مثال متذکر می‌شویم‌که بین قبایل جزیرهٔ **مارولاگ** در **تنگهٔ‌تورس** (Torres) ایـن اسامی بـرای اعـداد مضارب ۵ وجود دارد: ۵ــ نابــی‌گت، ۱۰ــ تابی‌گت نابی‌گت، ۱۵ــ نابی‌کوکو، ۲۰ــ نابی‌کوکو ـ نابی گت. «گت» یعنی دست و «کوکو Koku» یعنی پا، و بـاین ترتیب: ۵ــ دست، ۱۰ــ دست ـ دست، ۱۵ــ پا، ۲۰ ــ پا ــ دست و در ایـن باره نقل مـی‌کنند که: نباید گمــان کردکه «نابی‌گت» اسم عدد ۵ است، بلکه به‌معنای «به‌اندازهٔ انگشتان یك دست» است.

میکلوخو ـ ماکلای دربــارهٔ سیر عددشمــاری بــومیــان **گینهٔ نو** چنین می‌نویسد:

«بومیان روش جالبی برای شمردن دارند، آنها انگشتــان خود را یکــی پس از دیگری می‌بندند و صدای معینی را تکرار می‌کنند، مثلاً «به، به، به،...»، وقتی که به پنج رسیدند مــی‌گویند «ایبون‌ــبه» (دست). سپس شــروع به بستن انگشتان دست دیگر خود می‌کنند و دوباره تکرار می‌کنند «به،به،...»، تا وقتی‌که

---

*) ف. انگلس‌ــآنتی دورینگ.

به «ایبون‌ـ آلی» (دو دست) برسند. بعد از آن دوباره با تکرار «به، به،...» «سامبا ـ به» و «سامبا ـ آلی» (یک پا، دو پا) می‌رسند. اگر لازم باشد که بازهم بعد از آنرا بشمارند از انگشتان دست و پای یکنفر دیگر استفاده می‌کنند».*

ك.شتای‌نن در کتابی که دربارهٔ قبایل **باکاعیر** نوشته است، دربارهٔ استفاده از اندامهای بدن برای شمار می‌نویسد: «وقتی که باکاعیرها شروع به شمردن می‌کنند، انگشت کوچک دست چپ خود را می‌گیرند و می‌گویند: «توکاله». سپس انگشت میانهٔ کوچک خود را به آن اضافه می‌کنند و می‌گویند؛ (آخاگه). سپس انگشت میانه را و می‌گویند: «آخاگه ـ توکاله». بالاخره با اضافه کردن انگشت بزرگتر می‌گویند: «آخاگه ـ آخاگه ـ توکاله». سپس با اضافه کردن انگشت کوچک دست راست تکرار می‌کنند: «آخاگه ـ آخاگه». از آن ببعد در حالیکه بنوبت انگشتان خود را اضافه می‌کنند، هر دفعه می‌گویند: «مه‌را» (این). بهمین ترتیب به‌انگشتان پای چپ و بعد پای راست خودمی‌پردازند و هربار کلمهٔ «مه‌را» را تکرار می‌کنند. اگر به بیش از آن احتیاج به شمردن داشته باشند، موهای خود را می‌گیرند و به اینطرف و آنطرف می‌کشند».

توجه به این مطلب جالب است که قبایل **باکاعیر** برای نامگذاری اعداد تنها از دو کلمه استفاده می‌کنند ـ توکاله، آخاگه. در بسیاری زبانها نامگذاری اولین اعداد با اسامی اندامهای انسان و یا حیوان ارتباط نزدیک دارد و اغلب این اسامی هنوزهم وجود دارد. مثلاً در زبان چینی هم به عدد دو و هم به‌گوشها «پو» می‌گویند، در **تبت** کلمهٔ «پات‌شا» هم به معنی دو و هم به‌معنی بال است و بین «گوتن‌توتها» کلمهٔ «تکوآم» هم به‌معنای دو و هم به‌معنای دست است.

نباید گمان کرد که شواهد نژادشناسی ازاین قبیل می‌توانند ما را کاملاً به زمانهای گذشته ببرد، بلکه زندگی مردم معاصر هم در اطلاعات ریاضی ابتدائی آنها اثر گذاشته است.

در یکی از مقاله‌های **ایگناتیف** روزنامه‌نگار** اطلاعات جالبی دربارهٔ

---

*) سفرنامهٔ میکلوخو ـ ماکلای، جلد اول، چاپ شوروی، ۱۹۴۰ ـ صفحهٔ ۲۸۰.

) مقالهٔ «در مهمانی سرخ‌پوستان **ای‌اولاپیت» ـ روزنامهٔ «پراودای جوان» سال ۱۹۶۳ـ۱/۶.

طریقهٔ شمار سرخ پوستان **برزیل** مرکزی وجـود دارد، طبق نوشتهٔ این مقـاله: «آنها هنوز هم برای اعداد بزرگتر از ۲ ، اسمـی ندارند، ولـی برای عدد پنج می‌گویند «اوای‌ریکی» (دست) و برای محاسبهٔ روزها از مفهومی به‌معنـی هفت روز استفاده می‌کنند».

خود این مطلب که اغلب محاسبـات اولیه را به‌کمک انگشتـان انجـام می‌داده‌اند، نقش اساسی در تکامل محاسبهٔ سرانگشتی داشته است. روش محاسبهٔ با انگشت تا قرن هیجدهم، چه در اروپای غربی و چه در روسیه بطـور وسیعی معمول بوده است. تجار چینی و مغولی در ابتدای قرن حـاضر هم از این روش در محاسبات خود استفاده می‌کـردند. در سال ۱۵۲۹ در **بازل** کتابی کـه یک راهب نوشته بود تجدید چاپ شد که روش محاسبه با انگشتان را تا یک میلیون توضیح می‌داد.

ساکنین جزایر تنگهٔ **تورس**، می‌توانند با کمک اندامهـای مختلف بـدن آدمی هرعددی را تا ۳۳ بیان کنند و برای اینکه بدانند تعداد اشیاء چقدر است، کافی است بفهمند که ضمن شمردن به‌کجای بدن خود رسیده‌اند.

در تحقیقات و اکتشافات نژادشناسی به موارد مهمی برخورد مـی‌کنیم‌که می‌توان از آنها مقدمات تنظیم دستگاه عـددشماری را نتیجه گرفت. در نقل قول از نوشتهٔ **میکلو-خو-ماکلای** دیدیـم که از انگشتان دست بومـی سوم بـرای انتقـال دهه‌ها استفاده می‌شد. بـاین ترتیب اگر هر انگشت بومی دوم نمـایندهٔ یک واحد باشد، هرانگشت بومی سوم نمایندهٔ ده واحـد خواهد بود. شـواهد زندگی بومیان جزایر **تورس** نشان می‌دهد که «آنها در شمردن تمایل روشنـی به گروههای دوتـائی دارند» و این مطلب تا حـدی دستگـاه شمار در مبنای ۲ را بخاطر می‌آورد. در بسیاری از کشورها، و مثلاً در بعضی از قبایل **سودان**، شمار را با گروههائی کـه شامل ۱۲ شیئی هستند، انجام می‌دهند. و این را هم می‌توان مقدمه‌ای از دستگاه شمار با مبنای ۱۲ دانست. هنـوز هم بعنـوان بقـایـای این شمارش ۱۲ شیئی، در بعضی کشورها بعضی اشیاء را ۱۲-۱۲ می‌شمارند: یک دوجین حوله ـ یک دوجین مـداد و غیره. دوجین خـود واحـد ردیف بعـدی است: یک دوجین ـ دوجین مـی‌شود یـک «گـروس» و یک دوجین گـروس می‌شود «ماس». باین ترتیب می‌بینیم که در دستگاه شمـار به مبنای ۱۲ تا رقم

چهارم پیش رفته بودند و برای واحد هر رقم اسم بخصوصی داشته‌اند. ظاهراً این از خصوصیات شمار گروهی است که ملتهای مختلف به مناسبت گروه‌بندیهای مختلفی که برای شمارش اشیاء داشته‌اند به دستگاههای مختلف عدد شماری به مبناهای ۲، ۸، ۱۰، ۱۲، ۲۰ و ۶۰ رسیده‌اند. ولی از آنجائیکه عدد ۱۰ کاملاً به ساختمان بدن انسان وابسته است و ۱۰ انگشت دست همیشه وسیله‌ای برای شمارش اشیاء بوده است، دستگاه عدد شماری به مبنای ۱۰ بین بسیاری از ملتها و حتی آنها که با هم رابطه‌ای نداشته‌اند، بوجود آمده است.

آثار شمار گروهی در بسیاری از زبانها باقی مانده است. بعنوان مثال ذکر می‌کنیم که درزبان فرانسوی آثار دستگاه به مبنای بیست در نامگذاری اعداد به روشنی باقی مانده است. در زبان فرانسوی به عدد ۸۰ می‌گویند: چهار بیست‌تا (quatre-vingts)، به ۹۰: چهار بیست تا و ده تا (Quatre-vingts-dix) و به ۱۲۰: شش بیست‌تا (Six-vingts). در زبان فرانسوی قدیمی‌تر به ۱۴۰ «هفت بیست‌تا» به ۱۶۰ «هشت بیست تا» و به ۳۰۰ «پانزده بیست‌تا» می‌گفتند. رد پای دستگاه عددشماری به‌مبنای ۱۲ در زبانهای انگلیسی و هلندی هم باقی مانده است؛ و در زبانهای اسکاندیناوی هم آثار عدد شماری به مبنای ۵ وجود دارد.

شواهد بسیار جالبی، دربارهٔ موضوع مورد بحث ما، در رمان **تیخون سموشکین** بنام «آلیتت به شهر می‌رود» وجود دارد. در قسمت دوم این اثر واقعه‌ای شرح داده شده است که مربوط به وقتی است که معلمین جوان به **چوکوتکا** وارد می‌شوند و می‌خواهند با فرهنگ لغات آنجا آشنا شوند. در اینجا خلاصه‌ای از گفتگوی معلمین را نقل می‌کنیم.

... یکی از معلمین می‌گوید:

ــ اینها ترکیبات بسیار جالبی دارند، آنها بجای ۱۰ از مبنای عددشماری ۵ استفاده می‌کنند.

دیگری با تردید گفت:

ــ نه اینطور نیست، ببین: یک ــ انین، ده ــ مین گیت‌کن، یازده ــ مین‌ـ گیت کن اینن. واضح است که مبنای عدد شماری دهدهی است.

ــ کمی بعد آنرا هم نگاه کن! پانزده ــ کیل خین کن، شانزده ــ کیل‌خین‌ـ کن اینن...

باعث تأسف است که نویسندهٔ رمان روشن نمی‌کند که آیا کلمات «اینن»، «مین گیت‌کن» و «کیل خین‌کن» غیر از اینکه نامهای اعداد هستند، معانی دیگری دارند یا نه؟ و آیا به‌کلمات دست و پا ارتباطی ندارند؟

تحقیقات زبانشناسی ثابت می‌کند که نامگذاری اعداد بتدریج و در طول زمان به وجود آمده است، نه بطور آنی و بوسیلهٔ یکنفر. این مطلب هم جالب است که در زبان روسی دو عدد اول برحسب جنس (مذکر و مؤنث) تغییرمی‌کند (آدین — один آدنا одна، دوا два — دوه две) ولی بقیهٔ اعداد دارای این خاصیت نیستند. در زبان لاتین عدد سه هم برحسب جنس تغییر می‌کند.

این مطلب هم جالب است که ریشهٔ سه عدد اول برای تمام زبانهای شناخته شدهٔ هند و اروپائی مشترک است.

جدول کوچکی از این سه عدد برای مقایسهٔ زبانهای مختلف در اینجا می‌آوریم:

زبان	۱	۲	۳
سانسکریت	eka	dva	tri
یونانی	heis	dus	trieis
لاتین	unus	duo	tres
فرانسوی قدیمی	unan	daou	tri
انگلیسی	one	two	three
آلمانی	ein	zwei	drei
روسی	один	два	три
فرانسوی	un	deux	trois
فارسی	یک	دو	سه

توجه سطحی به این جدول نشان می‌دهد که تا چه اندازه نامگذاری سه عدد اول در این زبانها بهم نزدیک است و جالب اینست که این کلمات، بجز

اعداد، معنی دیگری ندارد و معرف اشیاء خاصی نیستند. اگر این مقایسه را برای اعداد بعدی ادامه دهیم روشن می‌شود که دیگر تلفظ آنها در زبانهای مختلف با هم بکلی فرق دارد و این به معنای آنست که سه عدد اول در زمانی دور از ما، در دورهٔ ماقبل تاریخی، شکل گرفته است و ظاهراً حتی قبل از دوران سکونت مردم بوجود آمده است.

تحقیقات زبانشناسی این فکر را هم به وجود می‌آورد که ملتهای مختلف الفاظی داشته‌اند که از آنها نه بعنوان اعداد معین، بلکه بعنوان «همه» و «کل» استفاده می‌کرده‌اند. در زبان چینی عبارت «چهاردریا» باقیمانده است که به‌معنای «همهٔ دریاها» است. این مطلب می‌رساند که در دوره‌ای از زندگی مردم چین برای اعداد بزرگتر ازسه وجه مشخص و روشنی وجود نداشته است و «چهار» مترادف با «همه» بوده است. در یکی از کمدیهای **آ.ن.آستروسکی** که خواستگار در چنین وضعی قرار دارد می‌گوید که برای او میلیون یعنی هر چیزی که از هزار بیشتر است.

از اینگونه جملات در زبان روسی، در گفتگوهای عادی و ضرب‌المثل‌ها فراوان است: «هفت» نفر منتظر یکنفر نمی‌شوند، هفت بدبختی و یک جواب*. بنظر می‌رسد که زمانی بوده است که هفت مرز شمار بوده و مترادف با «خیلی زیاد» بکار می‌رفته است. عبارت «هفت نفر منتظر یکنفر نمی‌شوند» به این معنا نیست که فقط «هفت» نفر انتظار یکنفر را نمی‌کشند و مثلاً اگر شش نفر بودند مانعی ندارد. اینجا کلمهٔ «هفت» مفهوم «یک کل» و «یک مجموعه» را بخاطر می‌آورد. همچنین «هفت بدبختی» به‌معنای مطلق هفت بدبختی نیست، بلکه معنی همهٔ بدبختی‌ها را می‌دهد. عدد دیگری که در زبان روسی این نقش را دارد ۴۰ است**. بیخود نیست که وقتی شکارچیان ازخرس چهلم صحبت می‌کنند، به‌معنای آخرین خرسی است که آنها می‌توانند شکار کنند. یا وقتی که می‌گویند درروسیهٔ قبل از پطر، در **مسکو** چهل چهل تا کلیسا بوده است، به این معنی نیست که درست ۱۶۰۰ کلیسا در مسکو بوده است، بلکه منظور اینست که آنقدر کلیسا

---

*) و مثلاً در زبان فارسی: «هفت» بار گز کن و یکبار پاره کن، «هفت» شهر عشق را عطار گشت (مترجم).

**) و در فارسی مثلاً «چلچراغ».

وجود داشته که قابل شمردن نبوده است. ظاهراً علت نحسی عدد ۱۳ را هم در همین جا باید جستجو کرد: می‌توانستند تا ۱۲ بشمارند ولی ۱۳ برای آنها سمبل و نمونهٔ نامفهومی و تاریکی بود.

این مطلب هم جالب است که با بحث لغوی ساده‌ای می‌توان نشان داد که اعداد بطریق ثابت و مبتنی براصل واحدی تشکیل نشده‌اند. مثلاً در زبان فارسی ده عدد اول هرکدام نام بخصوصی دارند ولی از آن ببعد با ترکیب این ده کلمه درست شده‌اند: یازده، هشتاد و نه و ... باین ترتیب ۱۱ از کلمات یک و ده و ۸۹ از کلمات هشت ــ ده ــ نه ترکیب شده‌اند. با وجود این استثنائاتی وجود دارد، مثل بیست، صد، هزار و غیره (کلماتی مثل چهل اگرچه ظاهراً ترکیبی از چهار و ده نیست ولی اثر کلمه چهار در آن بوضوح دیده می‌شود). هریک از این اعداد را یک گره گویند. بنابراین در زبان فارسی ۱۰ عدد اولیه هرکدام یک گره هستند و بعد از آن به گره ۲۰ و بعد صد و غیره می‌رسیم. در زبانهای دیگر هم شواهد جالبی از ناهم‌آهنگی تلفظهای شفاهی رشتهٔ اعداد باقی مانده است. مثلاً در زبان قبایل **یوروب** (افریقای مرکزی) اعداد گرهی در دو طرف قرار گرفته‌اند. بطوریکه بقیهٔ اعداد بوسیلهٔ این اعداد دوطرف و به کمک جمع یا تفریق ساخته شده‌اند:

$$۱۱ = ۱۰ + ۱ \;;\; ۱۲ = ۱۰ + ۲ \;;\; \dots \;;\; ۱۵ = ۱۰ + ۵$$
$$۱۶ = ۲۰ - ۴ \;;\; ۱۷ = ۲۰ - ۳ \;;\; \dots \;;\; ۱۹ = ۲۰ - ۱$$

اینجا هم ۱۰ و هم ۲۰ جزو اعداد گرهی هستند. اعداد ۷۰ و ۹۰ هم در زبان این قبایل با کمک همین دو عدد گرهی ساخته شده‌اند: بصورت:

$$۲۰ \times ۴ + ۱۰ \quad و \quad ۲۰ \times ۴ - ۱۰$$

توجه به یک کیفیت دیگر هم اهمیت دارد. رشتهٔ اعداد تا مدتها نامحدود نبوده است. با تکامل نیازهای تولید، این رشته مرتباً طولانی‌تر می‌شد، ولی بهر حال تنها مرز شمار دورتر می‌رفت و بعد از آن ابهام و تاریکی شروع می‌شد. بقول نوشته‌های اسلاوی «بیشتر از آن، چیزی نیست که به عقل آدمی برسد».

فکر نامحدود بودن رشتهٔ اعداد برای اولین بار بطور روشن در نوشتهٔ

ارشمیدس بنام «محاسبهٔ دانه‌های شن» وجود دارد. او می‌گوید که اگر کره‌ای با شعاع فاصلهٔ خورشید تا ستارگان ثابت در نظر بگیریم، برخلاف تصور بسیاری، می‌توان تعداد دانه‌های شن این کره را محاسبه کرد. هدف اصلی **ارشمیدس** از این نوشته در این بوده است که نشان دهد می‌توان هر عددی را، هرچقدر که بزرگ باشد، نوشت و آنرا خواند. ولی باید بخاطر داشت که این فکر اساسی تا مدتها بعد عمومی نشده بود. بیش از چند صد سالی نیست که احتیاج در محاسبات عملی (نجوم، بودجه‌های دولتی و غیره) فکر نامحدود بودن رشتهٔ اعداد را در دسترس همهٔ مردم قرار داده است.

دربارهٔ مقالهٔ «قدمهای نخستین در تکامل شمار»*

بخاطر بی دقتی باید از این بابت عذر بخواهم که قسمت آخر مقالهٔ اصلی حذف شده بود. در این مورد نه وقتی‌که مقاله را به هیأت تحریریه می‌دادم و نه موقع تصحیح آن توجه نکردم. این اشتباه مرا **آ. ن. کولموگوروف** یادآوری کرد و به این مناسبت از ایشان سپاس فراوان دارم.

اثر **ارشمیدس** «دانه‌های شن»، این هدف را دنبال می‌کرد که افسانهٔ مورد اعتقاد عموم را در مورد وجود «بزرگترین عدد» از بین ببرد و این هدف بیش از همه معنای فلسفی داشت تا ریاضی. ولی در همین سالها نخستین نتیجه‌گیریهای عمیق ریاضی هم دربارهٔ بی‌انتها بودن سلسلهٔ عددها بدست آمد. **اقلیدس** (سدهٔ سوم پیش از میلاد؛ تاریخ زندگی **ارشمیدس**: ۲۸۷-۲۱۲ پیش از میلاد) با دقت ثابت کرد که رشتهٔ عددهای اول بی‌پایان است. استدلال او خیلی ساده است و تا امروز هم در کتابهای درسی از همان روش استفاده می‌کنند. فرض می‌کنیم که رشتهٔ عددهای اول محدود باشد:

$$p_۱, p_۲, p_۳, \cdots, p_n$$

بقیهٔ عددها را غیر اول می‌گیریم. این عدد را در نظر می‌گیریم:

$$p_۱ \cdot p_۲ \cdot P_۳ \cdots p_n + ۱$$

*) نویسندهٔ مقاله، چند ماه بعد از انتشار مقاله خود، این یادداشت را برای مجلهٔ «ریاضیات در دبیرستان» فرستاده است.

این عدد بر هیچکدام از عددهای $p_۱$، $p_۲$، $p_۳$، ...، p_n قابل قسمت نیست و اگر این عدد اول نباشد، باید مقسوم‌علیهی غیر از عددهای نامبرده داشته باشد و این ممکن نیست، زیرا فرض کردیم که عددهای اول، محدود به همین n عدد باشد. پس‌خود این عدد باید اول باشد که آنهم ممکن نیست. به این ترتیب فرض محدود بودن تعداد عددهای اول به تناقض برخورد می‌کند و ازآنجا نتیجه می‌شود که رشتهٔ عددهای اول محدود نیست.

اراتوستن (۲۷۶–۱۹۴ پیش از میلاد) که با **اقلیدس** و **ارشمیدس** همزمان بود روش‌کلی بیرون‌کشیدن عددهای اول را از بین عددهای طبیعی مشخص کرد.

این تلاشها شروع مطالعهٔ منظم دربارهٔ خاصیتهای عددهای صحیح و پیش‌درآمد رشتهٔ نوی در ریاضیات بنام **نظریهٔ عددها** بود.

۳ ریاضیات ملتهای قدیم بین‌النهرین

ب. و. گنه دنکو

قریب شش هزار سال قبل در سرزمین حاصلخیز بین‌النهرین، بین دو رودخانهٔ دجله و فرات دولتی بوجود آمد و تمدن مستقلی پایه‌گذاری شد که به درجه‌های بالای شکفتگی و کمال رسید.

توده‌های گل و لای که در سواحل رودخانه می‌نشست به غنای محصول آنجا کمک فراوان میکرد ولی آب، با طبیعت بوالهوس و سرکش خود در همانحال که زندگی می‌آورد و فراوانی و برکت می‌بخشید می‌توانست سرچشمهٔ مصیبت و مرگ هم باشد. در مقابل آن انسان زحمتکش قدم بقدم اطلاعاتی بدست می‌آورد که در مبارزه علیه نیروهای قهار طبیعت او را یاری می‌کرد. برای آبیاری مزارع و حفاظت آنها از طغیان آب شروع بساختن کانالها و سدها (که ساده‌ترین وسائل آبیاری بودند) نمود. احتیاج او را واداشت تا در مقابل طغیان رودخانه‌ها، که مرزها را می‌شست و حدود مزارع را از بین برد، بدانش ریاضی دست یابد و راهی برای اندازه گیری مساحت قطعه‌های زمین جستجو کند...

پیشرفت نسبی تجارت، اطلاعات سادهٔ مربوط به حساب را لازم داشت تا در روابطی که بین افراد بود اختلاف محاسبه‌ای پیش نیاید، همچنین اقتصاد ابتدائی که براساس کار برده‌ها متکی بود بعضی اطلاعات ریاضی را ایجاب میکرد: میبایستی «حساب» محصول کار برده‌ها نگهداری شود و در عین حال

میبایستی مقدار آذوقه‌ای که برای حفظ جان زحمتکشان لازم بود برآورد شود.

ساختمان شهرها و قصرها و معابد بزرگ ایجاب میکرد که «حساب» مصالح ساختمانی و احتیاجات مربوط به نیروی کار نگهداری شود. مبارزات طبقاتی که در داخل حکومت بین‌النهرین قدیم وجود داشت و جنگهای مداومی که بخاطر تصرف سرزمینهای جدید و بچنگ آوردن برده‌ها و محصولات آنها در سایر کشورها انجام میگرفت و یا دفاع در مقابل همسایه‌هائی که بمنظور اشغال سرزمین آنها کمین کرده بودند، آنها را واداشت که دست بساختن استحکامات و نگهداشتن ارتش بزنند و این فعالیت هم به اطلاعات ساده ولی منظم ریاضی احتیاج داشت.

در حقیقت هم ملتهای بین‌النهرین مقدمات اطلاعات علمی را بوجود آوردند، اطلاعاتی‌که هم تمدن بعدی بین‌النهرین و هم تمدن یونان قدیم بر اساس آن پیش‌رفت و تکامل پیدا کرد. موفقیتهای اساسی آنها در زمینهٔ نجوم، ریاضی و طب بود. از برجهای معابد بعنوان رصدخانه استفاده می‌کردند و از آنجا با مشاهدهٔ آسمان بعضی از قوانین مربوط به حرکت سیارات راکشف کردند. منجمین بابلی زمان خسوف وکسوف را از قبل معین می‌کردند و برای اولین بار طرح حرکت زمین بدور خورشید را وارد در نجوم کردند.

قرنها گذشت. قدرت گذشتهٔ بابلیها و آشوری‌ها بوسیلهٔ فاتحین درهم شکسته شد. از آنهمه شهرهای مقتدر و غنی حتی خرابه‌ای هم باقی نماند، تمدن بابلی زیر توده‌های خاک مدفون شد و تنها خاطرهٔ ملتهای آنها بوسیلهٔ افسانه‌هائی که دربارهٔ عظمت ممالک از بین رفته وجود داشت باقی ماند و این وضع تا سدهٔ گذشته ادامه داشت، اما در سدهٔ اخیر حفریات منظمی شروع شد (اگرچه توأم با غارتگریهائی بود). حفریات اولیه بدست کسانی انجام گرفت که بدون نقشه بودند و از علم باستانشناسی اطلاعی نداشتند و بهمین مناسبت بسیاری از آثار ذیقیمت فرهنگ و تمدن گذشتهٔ ملتهای بابل بطور غیرقابل جبرانی از بین رفت. ولی همین اندازه از آثاری که باقی ماند توانست تصور ما را دربارهٔ دنیای قدیم بکلی تغییر دهد.

در خرابه‌های قصرهای قدیمی، قطعات کوچک گلی پیدا شد. ابتدا کسی بآنها توجه نمی‌کرد. اینطور بنظر می‌رسید که این توده آجرهای شکسته، که

روی آنها پر از نقشها و شیارهائی بود، بوسیلهٔ کرمها و در طول زمان باین صورت درآمده‌اند و چه بسیار از این آجرها که بیرون ریخته شد و با خاک مخلوط گردید. فقط بعدها معلوم شد که این آجرهای بی ارزش با علامتهای نامفهومی که روی آنهاست برای علم خیلی با ارزش‌تر از جواهرات سلاطین بابل قدیم است که اغلب تنها بخاطر آنها زمین را حفر می‌کردند.

معلوم شد که این قطعات گلی اسرار تاریخ، فرهنگ و طرز زندگی ملتهائی را که مدتهاست دیگر در عرصهٔ تاریخ وجود ندارند در خود نگهداری کرده‌اند. قطعات گلی که در شهر قدیمی **نینوا** پیدا شد کتابهای خاصی از کتابخانه‌ای بود که بوسیلهٔ **آشوربانیپال** ساخته شده بود (سدهٔ هفتم قبل از میلاد). کتابهای این کتابخانه برای استفاده خیلی بزرگ و ناراحت بودند، ولی در عوض شعلهٔ حریق در آنها کارگر نبود. یک مؤلف با ذوق قدیمی دربارهٔ انهدام **نینوا** می‌نویسد: «سواره نظام بسرعت می‌گذرد، شمشیرها برق می‌زنند، نیزه‌ها میدرخشند، دسته دسته کشته می‌شوند، و توده‌های نعش رویهم می‌ریزند، برای مرده‌ها پایانی نیست... نینوا ویران می‌شود، چه‌کسی به آن رحم می‌کند؟ شهر بدست آتش سپرده شد، قصرها و خانه‌ها سوختند ولی کتابخانه‌ها باقی ماند.»

حالا که ارزش این قطعات گلی معلوم شده است، آنها را با دقت جمع و نگهداری می‌کنند. بیش از هزاران قطعه از این آجرها بما رسیده است‌که از روی آنها زندگی اقتصادی بین‌النهرین و تاریخ آنجا و فرهنگ آنزمان روشن می‌شود، بین این کتیبه‌ها حتی دفترهای خاص مدرسه‌ای هم وجود دارد که آثار انگشتان شاگرد مدرسه‌های کوچک آنزمان هم باقی مانده است. بین این پاره‌آجرها، قطعاتی پیدا شده است که اختصاص به شرح مطالب ریاضی دارد و ما می‌خواهیم دربارهٔ آنها صحبت کنیم. ولی قبل از اینکه بشرح اطلاعات خود دربارهٔ ریاضیات آشور-بابل بپردازیم باید این مطلب را توضیح دهیم که در حقیقت تاریخ علم گذشته را بدون اطلاع از شرایط زندگی ملت‌هائی که این علم را بوجود آورده‌اند و بدون آشنائی با شرایط اجتماعی زندگی آنها و وضع قوای تولیدی آنها نمی‌توان فهمید. کسی که می‌خواهد بتاریخ علم بپردازد بایستی با تاریخ عمومی دورهٔ مورد علاقه‌اش آشنا باشد.

معلم مدرسه بخصوص بایستی به مطالعهٔ تاریخ ریاضی بین‌النهرین دلبستگی نشان دهد زیرا بسیاری از مطالبی را که او در مدرسه بشاگردان خود درس می‌دهد ارتباط با این دوره از تاریخ علوم دارد. اصل موضعی بودن اعداد، که طبق آن معنای هر رقم نسبت به جائی‌که قرار گرفته است تغییر می‌کند، برای نخستین‌بار در بابل به وجود آمد و مورد استفاده قرار گرفت. تقسیم محیط دایره به ۳۶۰ درجه، درجه به ۶۰ دقیقه و دقیقه به ۶۰ ثانیه هم از بین‌النهرین قدیم برای ما بیادگار مانده است. قریب به ۱۵۰۰ سال قبل از **فیثاغورث**، بابلیها از قضیه‌ای که امروز به قضیهٔ فیثاغورث مشهور است اطلاع داشتند. قبلاً گفتیم‌که ریاضیات برای فعالیت‌های عملی لازم بود. باین علت در کتابخانهٔ **آشوربانیپال** قسمت مخصوصی به‌کتاب‌های ریاضی اختصاص داده شده بود و خود **آشوربانیپال** دریکی از کتیبه‌های خود با افتخار می‌گوید که «من می‌توانم مسائل مشکلی را دربارهٔ ضرب و تقسیم حل کنم».

دستگاه عدد شماری بابلیهای قدیم کاملاً مخصوص بخود آنها بود: آنها هم از دستگاه دهدهی و هم از دستگاه شصت شصتی استفاده می‌کردند.

علامت  را برای واحد بکار می‌برند. این علامت از آنجا پیدا شد که برای علامتگذاری یک شیئی پاره‌خط کوچکی بطورعمودی قرار می‌دادند. پس از انتقال بخط میخی، این علامت بشکل میخ درآمد. برای ۲ همین علامت را دوبار پهلوی هم قرار می‌دادند () و برای سه، سه‌بار().

از چهار به بعد علامت‌ها را در دو یا سه طبقه می‌نوشتند:

 ۹ ؛  ۵ ؛  ۴

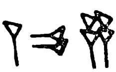
برای عدد ۱۰ علامت مخصوصی بشکل  داشتند. و بوسیلهٔ این علامت تا ۵۰ را می‌نوشتند:

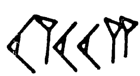
 ۵۰ ؛  ۳۰ ؛  ۲۰

هر عددی تا خود ۵۹ بوسیلهٔ همین علامت‌های نامبرده نشان داده می‌شد و برای اینکه اصل موضعی بودن رقمها کاملا رعایت شود، دهگان را همیشه سمت چپ یکان می‌نوشتند:

 ۵۱؛  ۴۳؛  ۳۵

ولی علامت  می‌توانست نه فقط برای واحد، بلکه برای هرعدد بصورت $k \pm ۶۰$ بکار رود. وقتی که علامت  سمت چپ علامت  قرار میگرفت، دیگر نمی‌توانست نمایندهٔ واحد باشد بلکه یا ۶۰ و یا $۳۶۰۰ = ۶۰^{۲}$ و حتی در بعضی موارد $۲۱۶۰۰۰ = ۶۰^{۳}$ را نشان میداد. مفهوم نوشته‌ها تنها از روی قرینه روشن می‌شد، به این ترتیب که نوشتهٔ  می‌توانست معنی ۷۲ و یا ۳۶۱۲ را بدهد. بعدها علامت  بوجودآمد که طبقات را از هم جدا میکرد و در حقیقت وظیفهٔ صفر امروزی را انجام می‌داد. ولی این علامت هم کاملاً باعث تشخیص عددها نمی‌شد، زیرا اختلاف بین ۳۶۰۴ و $۶۰\frac{۱}{۱۵}$ را حل نمی‌کرد و در هر دو حال باین ترتیب نوشته می‌شد:



اگر علامت  قبل از علامت شصت قرار می‌گرفت ۶۰۰ به حساب می‌آمد، بنابراین علامت  بمعنای ۶۸۲ بود.

قبلاً یادآوری کردیم که در نوشته‌های بابل قدیم برای جاهای خالی علامتی وجود نداشت. ولی موضوع و شرایط مسئله چنان نوشته می‌شد که اشتباهی در این مورد پیش نیاید. برای این منظور باید توجه کرد که عددها، مقادیر و اندازه‌ها را معین می‌کنند، بطوریکه علامتهای یکنواخت کاملاً از هم

تشخیص داده می‌شوند. در نوشته‌های ریاضی میخی محاسبات بینابینی وجود ندارد، آنها که در این زمینه تحقیق کرده‌اند باین نتیجه رسیده‌اند که محاسبات را بوسیلهٔ دستگاههائی از نوع تختهٔ محاسبه و یا چرتکه انجام می‌داده‌اند. اگر این فرض درست باشد، در اینصورت تا حد زیادی می‌توان فهمید که چرا برای صفر علامت نداشته‌اند، زیرا برای محاسبهٔ روی (دستگاه سادهٔ محاسبه) احتیاجی به صفر نیست (جای ستونی که نمایندهٔ صفر است خالی است).

در بین‌النهرین، برای عملیات مربوط به حساب بطور وسیعی از جدولهای اختصاصی استفاده می‌شد. بیجهت نیست که از بین ۳۰۰ جدولی که بدست آمده است قریب به ۲۰۰ تای آنها با یکدیگر فرق دارند.

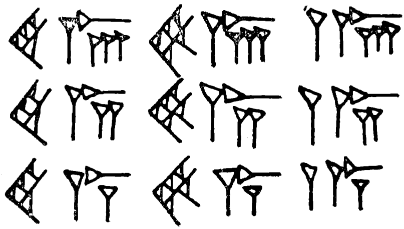
طبیعی است که جدولهای جمع و تفریق می‌توانستند مشترکاً تنظیم شوند. برای تفریق، علامت  بکار برده می‌شد و با کلمهٔ «lal» آنرا تلفظ می‌کردند. علامت تفریق را بین دو عدد قرا می‌دادند (اول از سمت چپ مفروق وسپس مفروق‌منه را می‌گذاشتند). درنوشته‌های نجومی‌که جدیدتراست علامت‌های جمع (tab) و تفریق برای توضیح یک رشته عملهای پشت سرهم بکار رفته است[1]. در بعضی نوشته‌ها، علامت تفریق برای شرح عدد بکار برده می‌شد. در یکی از قدیمی‌ترین جدولها همهٔ عددهای از ۳ تا ۶۰ داده شده است. همهٔ عددها به استثنای آنهائی که به ۷ و ۸ و ۹ ختم می‌شوند، بهمان طریقی که قبلاً شرح دادیم نوشته شده‌اند. در صفحهٔ بعد قطعهٔ کوچکی از یک جدول نقش شده است:

۱ــ در زیر خلاصه‌ای از یک جدول را که بزبان عددهای امروزی نوشته‌ایم، استخراج شده است:

$$۲۶\frac{۲۱}{۶۰}\ tab\ ۷\frac{۵۵}{۶۰}\ tab\ ۳۱\frac{۵۰}{۶۰}\ lal\ \frac{۲۳}{۶۰}\ \frac{۳۰}{۳۶۰۰}\ tab\ ۱۱\frac{۵۷}{۶۰}\ \frac{۳۰}{۳۶۰۰}$$

$$lal\ ۲۵\frac{۴۸}{۶۰}\ \frac{۳۰}{۳۶۰۰}\ lal\ ۳۱\frac{۴۷}{۶۰}\ \frac{۳۰}{۳۶۰۰}\ tab\ ۲۵\frac{۲}{۶۰}\ \frac{۳۰}{۳۶۰۰}\ lal$$

$$۱۱\frac{۴۳}{۶۰}\ \frac{۳۰}{۳۶۰۰}\ lal\ ۲۳\frac{۱۵}{۶۰}\ tab\ ۳۱\frac{۲۰}{۶۰}\ lal\ ۹\frac{۹}{۶۰}\ \ldots$$



شکل ۱

روشن است که عددهای ستون اول را باید چنین بخوانیم:

۴۰ — ۱ = ۳۹ , ۴۰ — ۲ = ۳۸ , ۴۰ — ۳ = ۳۷

همچنین عددهایی را که در ستون دوم هستند باید چنین خواند:

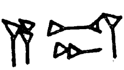
۵۰ — ۱ = ۴۹ , ۵۰ — ۲ = ۴۸ , ۵۰ — ۳ = ۴۷

ستون سوم خیلی جالب است، زیرا شامل نوشته‌های بابلیهای قدیم است. عددهایی را که در آن هست نباید بصورت:

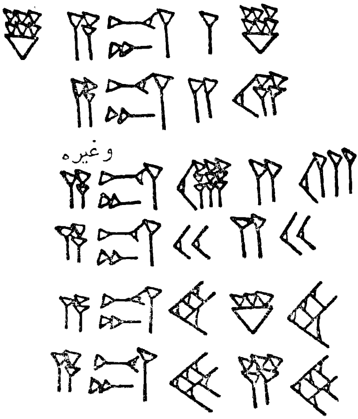
۱ — ۱ , ۱ — ۲ و ۱ — ۳

خواند بلکه آنها را باید باین ترتیب خواند:

۶۰ — ۱ = ۵۹ , ۶۰ — ۲ = ۵۸ , ۶۰ — ۳ = ۵۷

نباید گمان کرد که جدولهای ضرب در بابل قدیم خلاصه و ساده بوده‌اند، در حقیقت این جدولها خیلی ابتدائی بودند و مثل جدولهای امروزی دو طرفه نبودند بلکه یک طرفه بودند. برای ضرب علامت  را بکار می‌بردند و آنرا «ara» تلفظ می‌کردند که ظاهراً همان معنی «در» و یا «برابر» را میداد. ما قسمتی از یک جدول را که ضرب در ۷ را نشان می‌دهد در صفحهٔ بعد آورده‌ایم، در طرف راست شرح مطالب با زبان امروزی داده شده است:

۷	۱	در ۷
۱۴	۲	در ـ
۱۳۳	۱۹	در ـ
۱۴۰	۲۰	در ـ
۲۸۰	۴۰	در ـ
۳۵۰	۵۰	در ـ



وغیره

در جدول حاصل مربوط به ۷ عـدد بزرگتر از ۲۰ نشان داده نشده است و بشکل دهدهی هم نوشته نشده است، بنظر می‌رسد که این مطلب برای خلاصه‌کردن جدول است و ضمناً براین اساس است که ضمناً بتوان از جدول جمع هم استفاده کرد.

خصوصیت جدولهائی که برای تقسیم مورد استفاده قـرار می‌گرفت این بود کـه مقسوم را نمی‌نوشتند و آنـرا در ذهـن خـود مجسم می‌کردنـد. تمام جدولهائی را که برای مقادیر معکوس بکار می‌رفت می‌توان بـه دو دسته تقسیم کرد: در جدولهای قدیم‌تر در تقسیم بر عددهایی که خارج قسمت تمام شده‌ای در مبنای ۶۰ نمی‌داد اضافه می‌کردند که «تقسیم ممکن نیست» ولی در جدولهائی که بعدتر تنظیم شده است بکلی از نوشتن آنهـا صرفنظر می‌کردند. اگـر مقسوم را مساوی ۶۰ فرض کنیم در جدول‌های مقادیر معکوس علامتهای تقریباً بشکل زیر بدست میآوریم:

۲	در ۳۰	بر ۸	۷/۵
۳	» ۲۰	» ۹	۶$\frac{۲}{۳}$
۴	» ۱۵	» ۱۰	۶

۵	در ۱۲	بر ۱۲	۵
۶	« ۱۰	« ۱۵	۴

مدتها تنها کسرهائی که دارای صورت ۱ بودند مورد مطالعه قرار می‌گرفت، در این مورد تنها کسر $\frac{۲}{۳}$ استثنا بود که برای آنهم علامت مخصوصی بشکل  داشتند.

یکی از جدولهائی که مقادیر معکوس را بطور کامل دارد بوسیلهٔ مؤلف چنین شروع می‌شود: «به نام آنا و آنتوما، آنچه که من با دستهای خودم درست کرده‌ام مورد قبول قرار گیرد». واضح است که تنظیم چنین جدولهائی در آن موقع کاری خیلی مشکل بود و مستلزم حوصله و پشتکار زیادی بود. ولی این زحمت را با توجه به اهمیتی که برای کار قائل بوده‌اند تحمل می‌کردند.

جدولهائی دربارهٔ به توان رساندن و جذر گرفتن هم بما رسیده است. جدول مربعهای از ۱ تا ۶۰ تنظیم شده است. از همین جدولها می‌توانستند برای ریشه گرفتن استفاده کنند، ولی با وجود این برای جذر گرفتن جدولهای اختصاصی هم وجود داشت. جدولهای کعب عددها هم بدست آمده است (ولی تا امروز جدولهای مربوط به مکعب اعداد پیدا نشده است).

همچنین جدول عددهای بصورت $n^۳ + n^۲$ به ازای همهٔ مقادیر n از ۱ تا ۶۰ هم پیدا شده است. بالاخره تعداد زیادی جدول بدست آمده است که شامل توانهای متوالی بعضی عددها است.

مثلا جدولهای عددهای ۹^n و ۱۰۰^n و ۲۲۵^n به ازای مقادیر از $n = ۲$ تا $n = ۱۰$. ذکر این مطلب هم جالب است که جدولهائی وجود داشت که جذر تقریبی عددهایی را که جذر صحیح ندارند بدست می‌داد. بعدها وقتی که مطالعهٔ نوشته‌های میخی را از نظر اطلاعات هندسی مورد مطالعه قرار دهیم دوباره باین مطلب برخواهیم گشت. وقتی که مسئلهٔ مربوط به اطلاعات جبری بابلیهای قدیم را مورد مطالعه قرار دهیم روشن خواهیم کرد که جدولهای بصورت $n^۳+n^۲$ بچه منظور تهیه شده است.

اغلب مسائلی کــه در نوشته‌هــای شناخته شده به آنها برخــورد می‌کنیم خصوصیت عملی دارنــد. در این مسائل بطور وسیعی از دستگـاه اندازه‌گــیری آنزمــان استفاده شده است و بنابراین قبل از آنکه به مطالعهٔ مسائل مشخصی از حساب، هندسه وجبر نوشته‌های‌میخی بپردازیم باید بادستگاه واحدهای‌اندازه‌گیری مردم بین‌النهرین آشنا شویم.

البته در آشور و بابل قدیم همهٔ خوانندگان نوشته‌ها در یک سطح اطلاع نبودند و بهمین مناسبت جدولها از نظر نوع مطلب بـا یکدیگــر اختلاف دارد: بعضی از آنها به مبتدیان اختصاص دارد و شامل مسائـل ساده‌ای از حساب است و بعضی دیگر برای‌آشنا کردن خواننده به‌جبر تهیه شده است، درهردو نوع جدول از اطلاعات هندسی استفاده می‌شده است. توضیح مطالب هم از این تنوع بدور نیست. بعضی از جـدولها کوتاه و روشن نوشته شده، در حالیکه در بعضی دیگر تفصیل و تکرار بکار رفته است. ولـی در همـهٔ جدولها فقط راه حل داده شده و در هیچیک از آنها دربارهٔ عملهایی که انجام گرفته، شرح داده نشده است.

دستگاه اندازه‌گیری مردم بین‌النهرین در یک دورهٔ طولانی به وجود آمد که ما در اینجا نمی‌توانیم دربارهٔ آن صحبت کنیم و بــه خلاصه‌ای از اطلاعات مربوط به این مطلب اکتفا می‌کنیم که لااقل تصوری در این زمینه برای مــا پیدا شود. ما از اندازه‌گیری وزن شروع می‌کنیم، زیرا این مقیاس در عین حال برای واحد پول هم بکار می‌رفت (ارزش آن متناسب با وزن آن بود).

کوچکترین واحدی که برای وزن داشتند «شه» بود (که بابلیها **«شه اوم»** می‌گفتند) وبزبان سومری به معنای «دانه گندم» بود. در مقایسه با مقیاس امروزی ما «شه» تقریباً مساوی ۴۶/۷۵ میلیگرم بود:

۱ شه کل $\#$ ۸/۴^g = ۱۸۰ شه

۱ مینا $\#$ ۵۰۰^g = ۶۰ شه کل

۱ تالانتا $\#$ ۳۰/۳ kg = ۶۰ مینا

متذکر می‌شویم که در دوره‌های بعدی، «شه» تنها به‌معنای واحدی برای وزن بکار نمی‌رفت، بلکه بطورکلی معنای کسر $\frac{1}{180}$ را میداد.

واحد حجم «سیلا» تقریباً مساوی ۰/۸۴ لیتر و هر ۳۰۰ «سیلا» مساوی با یک «گور» بود. اندازه‌گیری طول کم و بیش در هر شهر نسبت بشهر دیگر متفاوت بود. مثلاً درشهر «لاگاش» هر ارش یا«آرنج» مساوی با ۴۹۵ میلیمتر و در نیپور و بابل مساوی ۵۱۸ میلیمتر بود. کوچکترین واحد اندازه‌گیری‌طول «شه» بود $\left(\frac{۱}{۱۸۰}\right.$ ارش$\left.\right)$. تقریباً مساوی ۲/۷۵ میلیمتر و سپس:

ارش (آمان) = ۱۸۰ شه # ۵۰^{cm}
گار = ۱۲ارش # ۶۰۰^{cm}
اوش یا گوش = ۶۰ گار # ۲۶۰^{m}
میلیا = ۳۰ اوش # ۱۰^{km} ۸۰۰^{m}

و باز هم اندازه‌هائی متناسب با ارش داشته‌اند:

۳۰ انگشت = ۲ پا = ۱ ارش

اساس اندازه‌گیری سطح «سار» = (توان دوم یک گار) و بعد از آن اندازه‌هائی بود که مفهوم آنها از نسبتهای زیر روشن می‌شود:

۱۸۰ شه = ۶۰ شه‌کل = سار
^{۲}(۱۰گار) = ۱۰۰ سار = ایکو
ایکو = ۶۰۰ سار = یشه
۱۸ ایکو = ۳ یشه = بور
۱۸۰ ایکو = ۱۰ بور = بورد

در مورد اندازه‌گیری سطح بخصوص این مطلب جالب است که با اصول مختلف تشکیل شده‌اند: هم اعشاری و هم شصت شصتی وبنظر میرسد که درنتیجه پیشرفت و اختلاط دستگاههای مختلف اندازه‌گیری بوجودآمده باشد.

در جدولهایی که محتوی اقتصادی دارند، و به گزارشهای مدیران املاک و یا اسناد مطالبات مربوط است، نوشته‌های زیادی وجود دارد که میزان ربح قرض را معین کرده است. رقم ربحها خیلی زیاد بود و مثلاً برای قرض نقرهٔ

قانونی ۲۰٪ و برای قرض گندم ۳۰٪ در سال مطالبه می‌شد. از اینگونه مسائل بکرات در رساله‌ها بچشم می‌خورد. فقط متذکر می‌شویم که در بین‌النهرین «ربح» را از ۶۰ برمیداشتند نه از ۱۰۰.

اینک متن یک مسئله را ذکر می‌کنیم:

«بخاطر یک مینا نقره ۱۲ شه کل داد و ربح مساوی ۱ مینا و ۴۰ شه‌کل شد. اگر ۱ مینا بگیری ربح آن ۱۲ شه کل می‌شود، حالا که ۱ مینا و ۴۰ شه‌کل ربح داده‌ای او چقدر بتو داد... عکس ۱۲ را بوجود بیاور، ۵* را در ۱ مینا و ۴۰ شه کل ضرب کن، سرمایهٔ اصلی $۸\frac{۱}{۳}$ مینا میشود...»

مسئله خیلی ساده است: میخواهیم سرمایهٔ اصلی را پیدا کنیم، بشرطی که آنرا با ۲۰٪ به مرابحه داده‌ایم و ربح آن مساوی ۱ مینا و ۴۰ شه کل شده است.

در جدولها مسائل مشکل‌تر و مثلاً محاسبهٔ مجموع جمله‌های یک تصاعد حسابی و یا هندسی ومحاسبهٔ مجموع مربعهای عددهای صحیح متوالی هم وجود دارد. مجموع مربعهای عددهای متوالی را درحالتهای خاص بدست می‌آوردند ولی این محاسبه طوری تنظیم می‌شد که از رابطهٔ زیر استفاده می‌کردند:

$$\sum_{i=۱}^{n} i^{۲} = \frac{۱}{۳}(۱+۲n)\sum_{i=۱}^{n} i$$

به سختی می‌توان قبول کرد که توانسته باشند چنین طریقهٔ محاسبه‌ای را تنها از راه تجربه بدست آورند.

ظاهراً بابلیهای قدیم به بعضی روشهای کلی دست یافته بودند، منتهی بخاطر حفظ سنتهای خود، این روش‌ها را در جدولها وارد نمی‌کردند.

---

*) در حقیقت ربح $\frac{۱}{۱۲}$ مینا مساوی یک شه کل میشود و چون هرمینا ۶۰ شه کل است پس ربح ۵ شه کل مساوی یک شه کل می‌شود و یا می‌توان‌گفت هر ۵ مینا یک مینا ربح دارد.

ما در اینجا متن یک مسئلهٔ مربوط به استفاده از تصاعد حسابی و ترجمهٔ حل آنرا می‌آوریم:

«۱۰ بـرادر و $۱\frac{۲}{۳}$ مینا نقــره. هر برادر بیشتر از برادر قبلـی دارد، اما چقدر بیشتر من‌نمی‌دانم. سهم برادر هشتم ۶ «شه‌کل» شده است، هر برادر از برادر قبلی چقدر بیشتر دارد؟» مسئله با روشنی و بخوبی تنظیم شده است:

بین ۱۰ برادر $۱\frac{۲}{۳}$ «مینا» نقره را چنان تقسیم کنید که هر برادر کوچکتر سهم کمتر از برادر بزرگتر خود نصیبش شود. می‌خواهیم این اختــلاف سهم‌ها را پیدا کنیم بشرطی که بدانیم برادر هشتم ۶ «شه‌کل» دریافت کرده است.

حل مسئله باین طریق داده شده است:

«عکس عدد ۱۰، افراد، را بوجود بیار می‌شود $\frac{۶}{۶۰}$ این $\frac{۶}{۶۰}$ را در $۱\frac{۲}{۳}$ مینا نقره ضرب کن که می‌شود $\frac{۱۰}{۶۰}$ حالا $\frac{۱۰}{۶۰}$ را دو برابر کن میدهد $\frac{۲۰}{۶۰}$».

باین ترتیب دو برابر سهم متوسط را پیدا کرده است: اگر سهم برادر iام را n_i فرض کنیم، دو برابر سهم متوسط چنین می‌شود:

$$\frac{۲}{n}\sum_{i=۱}^{n} a_i$$

«$\frac{۶}{۶۰}$، یعنی سهم برادر هشتم را دو برابرکن، میشود $\frac{۱۲}{۶۰}$. حال $\frac{۱۲}{۶۰}$ را از $\frac{۲۰}{۶۰}$ کم کن می‌شود $\frac{۸}{۶۰}$ این $\frac{۸}{۶۰}$ را در ذهن خود نگهدار».

باین ترتیب اختلاف زیر را پیدا کرده است:

$$۲ \times \frac{۱}{۱۰}\sum a_i - ۲a_۸$$

«۱ را با ۱ جمع کن و این می‌دهد ۲. بعد ۲ را دو برابر کن می‌دهد ۴. حالا ۱ را با ۴ جمع می‌کنی و این می‌دهد ۵. اگر ۵ را از ۱۰ ، تعداد افراد، کم کنی می‌دهد ۵».

ازمفهوم مسئله بر می‌آید که ۱و۱ تعداد فواصل بین برادرهای اول وسوم و هم‌چنین بین برادرهای هشتم و دهم است. ۵ هم تعداد فواصل بین سوم وهشتم است. توجه کنیم که تفاضل قبلی عبارت بود از باقیماندهٔ تفریق دو برابر جملهٔ هشتم از مجموع $a_۳$ و $a_۸$ یعنی ۵ برابر قدر نسبت تصاعد.*

«عکس ۵ را بوجود بیار می‌دهد $\frac{۱۲}{۶۰}$. حالا $\frac{۱۲}{۶۰}$ ضرب می‌شود در $\frac{۸}{۶۰}$ و میدهد $\frac{۳۶}{۳۶۰۰}+\frac{۱}{۶۰}$. و این $\frac{۳۶}{۳۶۰۰}+\frac{۱}{۶۰}$ «مینا» سهمی است که یک برادر بیشتر از برادر دیگر می‌گیرد.»

حل مسئله کاملاً دقیق است وضمناً مؤلف آن قدم بقدم راه حل را تعقیب می‌کند. اگر نوشته را بصورت جبری درآوریم به رابطهٔ زیر میرسیم:

$$d=\frac{۲\frac{S}{n}-۲a_k}{n-[۲(n-k)+۱]}$$

که مؤلف جدول از آن استفاده کرده است. البته ما نمی‌توانیم گمان کنیم که می‌توان گذشته را تا این اندازه به صورت امروزی بیان کنیم، بخصوص که گرایش مؤلف بطور جدی بسمت روشهای حساب است.

حالا مسئلهٔ دیگری را که با محاسبهٔ مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی مربوط است ذکرمی‌کنیم. این متن مربوط به زمان سلوکیدها (۴ قرن قبل ازمیلاد)

---

*) تفاضل قبلی را به‌ترتیب میتوان چنین نوشت:

$$۲\times\frac{۱}{۲۰}\sum a_i-۲a_۸=(a_۳+a_۸)-۲a_۸=a_۳-a_۸=۵d$$

(d را قدر نسبت تصاعد گرفتیم) . (مترجم).

است، ولی از دوره‌های قبل از آن هم لوح‌هائی با مضامین مشابه آن بدست‌آمده است.

متن مسئله باین ترتیب شروع می‌شود: «به‌امر «آنو» و «آنتوم» که سربلند باشند». ما تمام این متن کوتاه را بطور کامل ذکر می‌کنیم با این تفاوت‌که بجای رقمهای بابلی، رقمهای امروزی را قرار داده‌ایم:

«از ۱ تا ۱۰ قرار بده، ازروی ۲ بگذر، جمع کن. ۵۱۲. یک از ۵۱۲ کم کن. میماند ۵۱۱، ۵۱۱ به ۵۱۲ اضافه کن. ۱۰۲۳».

با همهٔ اختصاری که این متن دارد، میتوان فهمید که صحبت از مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی است:

$$۱ + ۲ + ۲^{۲} + \cdots + ۲^{۹} = ۱ + ۲ + ۴ + \cdots + ۵۱۲$$

طبق متن این مجموع برابر است با:

$$۵۱۲ + (۵۱۲ - ۱)$$

باین ترتیب ظاهراً مؤلف از رابطهٔ زیر استفاده می‌کند:

$$S_n = ۲^n + (۲^n - ۱)$$

معلومات جبری در بین‌النهرین قدیم باندازهٔ کافی وسیع بود. اینکه می‌گوئیم باندازهٔ کافی، باین مناسبت است که در نوشته‌های کشف شده مسائلی از دستگاههای معادله‌های درجهٔ اول، جستجوی مجهول در معادله‌های درجهٔ دوم، درجهٔ سوم و معادله‌های دو مجذوری وجود دارد. البته همهٔ مسائلی که دراین موارد وجود دارد، فقط با مفروضات عددی هستند و برای حل آنها هرگز از رابطه‌های مشخص و معلومی استفاده نشده است. ولی از نوع عمل و بحث می‌توان نتیجه گرفت که چنین رابطه‌هایی برای مؤلفین آنها روشن بوده است، منتهی به خوانندگانی که تنها علاقمند به روش حل مسائل (و نه اساس این روشها) بوده‌اند ردیف عملها داده شده است.

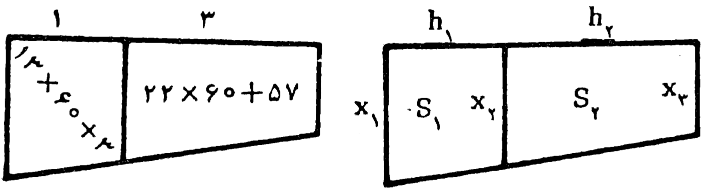
چند نمونه از این مسائل را ذکر کنیم:

«ذوذنقه‌ای دارای دو قسمت است، $۱۳ \times ۶۰ + ۳$ سطح بالائی و

۵۷ + ۶۰ × ۲۲ سطح دوم آنست. طول بالائی یک سوم طول پائینی است. آنچه که عرض بالا بیشتر است از خط فاصل، و آنچه خط فاصل بیشتر است از عرض پائین، مجموعاً میدهد ۳۶. طولها، عرضها و خط فاصل چقدر هستند؟»

در متن شکل هم وجود دارد، ولی خیلی بی‌دقت رسم شده و هیچیک از شرایط مسئله در آن رعایت نشده است.

تمام اندازه‌های مفروض هم روی شکل نوشته شده و همان طور که معمول بوده آنرا روی جدولهای میخی قرار داده‌اند و این مربوط بخصوصیات تکامل خط میخی است که ما وارد بحث در آن نمی‌شویم. ما روی شکل دوم علامتهای حرفی برای مجهولها و معلومها در نظر گرفته‌ایم.



شکل ۲

طبق شرایط مسئله می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$S_۱ = ۱۳ \times ۶۰ + ۳; \qquad S_۲ = ۲۲ \times ۶۰ + ۵۷;$$
$$h_۱ : h_۲ = ۱ : ۳;$$
$$c = (X_۱ - X_۲) + (X_۲ - X_۳) = ۳۶،$$

با توجه به تشابه دو شکل داریم:

$$\frac{X_۱ - X_۲}{h_۱} = \frac{X_۲ - X_۳}{h_۲}$$

و بنابراین:

$$\frac{X_۱ - X_۲}{X_۲ - X_۳} = \frac{h_۱}{h_۲} = \frac{۱}{۳}$$

اگر ضریب نسبتهای مساوی را α فرض کنیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$X_۱ - X_۲ = \alpha$$
$$X_۲ - X_۳ = ۳\alpha$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$۴\alpha = c = ۳۶$$

محاسبه‌ای که در متن وجود دارد از همین جا، یعنی از تقسیم ۳۶ بر ۴ شروع می‌شود. باین ترتیب $\alpha = ۹$ و بنابراین:

$$X_۱ - X_۲ = ۹ \quad , \quad X_۲ - X_۳ = ۲۷$$

در متن چنین گفته شده است:
«۹ هست آنچه که اختلاف است بین عرض بالا و خط فاصل، ۲۷ هست آنچه که اختلاف است بین خط فاصل و عرض پائین».
بعد در متن قدم بقدم به تساوی زیر می‌رسد:

$$\left(\frac{۱}{۱}S_۱ - \frac{۱}{۳}S_۲\right)\frac{۲}{۱+۳} = ۲\times ۶۰ + ۴۲$$

ولی:

$$S_۱ = \frac{h_۱}{۲}(X_۱ + X_۲) \;\; ; \;\; S_۲ = \frac{h_۲}{۲}(X_۲ + X_۳)$$

و چون $h_۲ = ۳h_۱$ است، در اینصورت:

$$S_۱ - \frac{۱}{۳}S_۲ = \frac{h_۱}{۲}(X_۱ - X_۳)$$

قبلاً داشتیم: $X_۱ - X_۳ = (۱+۳)\alpha = ۳۶$، بنابراین $h_۱ = ۱۸$ و $h_۲ = ۵۴$ می‌شود. بخصوص همین نتیجه‌ها هم در متن آمده است.

بعد در متن تساوی زیر ذکر شده:

$$\frac{۱}{۲}\times ۳۶\times ۷۲ = ۲۱\times ۶۰ + ۳۶$$

از مفروضات مسئله روشن است که ۳۶ همان $X_۱ - X_۳$ است و ۷۲ هم مجموع ارتفاعهایی است که $h_۱$ و $h_۲$ نامگذاری کردیم. باین ترتیب مساحت مثلثی که قاعدهٔ آن $X_۱ - X_۳$ و ارتفاعش $h_۱ + h_۲$ است، پیدا مـی‌شود. سپس مؤلف، اختلاف مجموع مساحتهای ذوزنقه و مساحت مثلثی که هم‌اکنون محاسبه شد، بدست می‌آورد و این مساحت مستطیلی است به‌قاعدهٔ $X_۳$ و ارتفاع $h_۱ + h_۲$ و برابر است با:

$$۳۶\times ۶۰ - ۲۱\times ۶۰ - ۳۶ = ۱۴\times ۶۰ + ۲۴$$

حالا دیگر با محاسبهٔ ســاده ضلع $X_۳$ بدست می‌آید که مســاوی با ۱۲ خواهد بود. ضلعهای $X_۱$ و $X_۲$ هم از تساوی‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$X_۱ = (X_۱ - X_۳) + X_۳ = ۳۶ + ۱۲ = ۴۸\ ;$$
$$X_۲ = (X_۲ - X_۳) + X_۳ = ۲۷ + ۱۲ = ۳۹$$

در اینجا بی‌مناسبت نیست گفتارمحقق مشهور آلمانی «**ا. نیگه‌بارو**» را که روی مطالب ریاضی نوشته‌های میخی کـار می‌کند، دربارهٔ این مسئله بیاوریم:

«این متن از هر جهت آموزنده است و بخصوص نمـونهٔ جـالبـی برای قضاوت دربارهٔ جنبهٔ خاص نوشته‌های ریاضی می‌باشد. در حقیقت نظم کار هنوز هندسی است: ولی محاسبه، چیزی جز تعیین جبری مجهولها بر اساس رابطه‌های مفروض نیست. محاسبه با ظـرافت فوق‌العـاده و درست با همان روش امروزی انجام می‌گیرد. و این بدون تردید نشان می‌دهد که بابلیها کاملاً به‌روشهـائی که برپایهٔ استفاده از رابطه‌های داخلی قرار داشت، آشنا بودند. کافی است حتی به این مطلب توجه کنیم که ضرب در ۱ را چگونه نشان می‌دادند (وقتی که در رابطهٔ کلی، ضرب در واحد لازم است) ، اگرچه این عمل در مقدار نتیجهٔ عددی، اثری نمی‌گذارد.

این متن از این نظر هم‌آموزنده است که نشان می‌دهد با نوشته‌های میخی چگونه باید برخورد کنیم. این نوشته‌ها دربارهٔ مفاهیم، هیچگونه توضیحی نمی‌دهند و بنابراین گاهی مقصود معینی که دنبال شده است، در جریان محاسبه، خیلی پیچیده و بغرنج می‌شود. همانطور که دیدیم، نحوهٔ بیان، مفهوم کاملاً عمیقی دارد و برای مسئله خیلی خوب انتخاب شده است، ولی برای اینکه از آنها سر در بیاوریم باید از قبل بدانیم که چگونه با این نوع مسائل برخورد کنیم.

ازطرف دیگر، بطور کاملاً روشن معلوم می‌شود که این گونه متنها برای معلمینی نوشته شده است که می‌توانسته‌اند قوانین کلی را روی نمونه‌های جداگانه توضیح دهند».

مسئلهٔ دیگر:

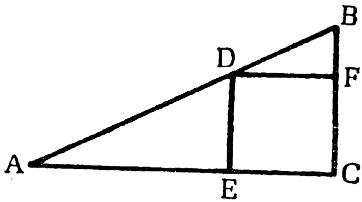
«یک هفتم طول، یک هفتم عرض و یک هفتم مساحت را جمع کن، بدست می آید ۶۰×۲، طول و عرض را جمع کن بدست می آید $۵ \times ۶۰ + ۵۰$. طول و عرض چیست؟ $۳ \times ۶۰ + ۳۰$ طول و $۲ \times ۶۰ + ۲۰$ عرض است».

واضح است که این مسئله به حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر منجر می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{x}{۷} + \frac{y}{۷} + \frac{xy}{۷} = ۱۲۰ \\ x + y = ۳۵۰ \end{cases}$$

در یکی از متنها که به میانه‌های هزارهٔ دوم قبل از میلاد مربوط است، مسئله‌ای است که در آن صحبت از «پرتاب کنندهٔ قلعه کوب» شده است. پرتاب‌کننده‌ای ساخته می‌شود (در شکل ۳ مقطع عرضی آن داده شده است). BC دیوار شهر دشمن است؛ DE سطح قائمی که قسمت ساخته شدهٔ پرتاب کننده را محدود می‌کند، EC فاصلهٔ آن تادیوار شهر دشمن، عرض پرتاب کننده $l = ۶$ است (روی شکل نشان داده نشده است)، $EC = ۸$، ارتفاع قابل دسترس $ED = ۳۶$ و حجم خاکی که برای ساختن پرتاب کننده لازم است $V = ۶۰^۲ + ۳۰ \times ۶۰$

باید ارتفاع BC دیوار شهر و طول AC پرتاب کننده را پیدا کرد.



شکل ۳

فرض می‌کنیم:

$$EC = a = ۸ \ ; \ DE = b = ۳۶ \ ; \ BC = x \ ; \ AC = y$$

مساحت مثلث ABC می‌شود:

$$S = \frac{V}{l} = \frac{۶۰^۲ + ۳۶ \times ۶۰}{۶} = ۱۵ \times ۶۰$$

حل امروزی مسئله باین صورت است:

$$S = \frac{xy}{۲}$$

از تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\frac{x}{x-b} = \frac{y}{a}$$

و بنابراین:

$$ax^۲ = ۲s(x-b)$$

و از آنجا به این دو جواب می‌رسیم:

$$x_1=\frac{s}{a}+\sqrt{\left(\frac{s}{a}\right)^۲-۲\frac{s}{a}b}=۱۸۰\,,$$
$$x_۲=\frac{s}{a}-\sqrt{\left(\frac{s}{a}\right)^۲-۲\frac{s}{a}b}=۴۵$$

تذکر این نکته جالب است که محاسبه‌های اصلی کاملاً با رابطهٔ اخیر تطبیق می‌کند. جواب اول حذف شده است. (ظاهراً باین دلیل که غیر ممکن است ارتفاع دیوار به ۱۸۰ ارش ــ تقریباً ۹۰ متر ــ برسد). در اینجا حل مسئله را آنطور که در متن اصلی داده شده است ذکر می‌کنیم:

با داشتن $۶۰ \times ۳۰ + ۶۰^۲$ «سار»[۱] من شهر دشمن «مردوک»[۲] را می‌گیرم. ۶ برای قاعدهٔ سنگ‌انداز، ۸ فاصلهٔ از دیوار، ۳۶ ارتفاع تودهٔ خاک، برای تصرف شهر چه ارتفاعی از شهر را باید بکوبم؟ و طول پشت پرتگاه چقدر است؟

عکس ۶، قاعدهٔ تودهٔ خاک، را به وجود بیار، $\frac{۱۰}{۶۰}$ را می‌بینی. $\frac{۱۰}{۶۰}$ را در $۶۰ \times ۳۶ + ۶۰^۲$ تودهٔ خاک، ضرب کن ۶۰×۱۵ را می‌بینی. عکس ۸ را به وجود بیار $\frac{۳۰}{۶۰^۲}+\frac{۷}{۶۰}$ را می‌بینی. $\frac{۳۰}{۶۰^۲}+\frac{۷}{۶۰}$ را در ۶۰×۱۵ ضرب کن $۶۰+۵۲+\frac{۳۰}{۶۰}$ را می‌بینی. $۶۰+۵۲+\frac{۳۰}{۶۰}$ را به توان ۲ برسان، $۳ \times ۶۰^۲+۳۰ \times ۶۰+۵۶+\frac{۱۵}{۶۰}$ را می‌بینی. $۲ \times ۶۰^۲+۱۵ \times ۶۰۰$ را از $۳ \times ۶۰^۲+۳۰ \times ۶۰+۵۶+\frac{۱۵}{۶۰}$ خارج کن، $۶۰^۲+۱۵ \times ۶۰+۵۶+\frac{۱۵}{۶۰}$ را می‌بینی. جذر این عدد چیست؟

---

۱. در متن گفته شده «گان»:

(گار)[۲] = ۱۰۰ سار = گان

۲. «مردوک» ــ خدای جنگ

$\frac{۳۰}{۶۰} + ۷ + ۶۰$ را مـی‌بینـی. $\frac{۳۰}{۶۰} + ۷ + ۶۰$ را از $\frac{۳۰}{۶۰} + ۵۲ + ۶۰$ خارج کن، تو ۴۵ را می‌بینی که ارتفاع دیوار است».

طول سنگ‌انداز در متن میخی از رابطهٔ زیر پیدا شده است:

$$y = s : \frac{x}{۲}$$

م. یا. ویگودسکی (کـه مـا این متن را با جزئی تغییراتی از مقالـهٔ او برداشته‌ایم) چنین می‌نویسد: «می‌بینیم که در زیر نقاب یک مسئلهٔ واقعی و عملی سؤالهای غیر واقعی (که در عمل پیش نمی‌آید) وجود دارد (مطلبی که تا امروز هم در اکثر کتابهای مسئله بچشم میخورد). این امر حاکی از آنست کـه در دورهٔ تنظیم این متن بتدریج نظریهٔ انتزاعـی ریاضـی بوجود می‌آمـد که برای جلب توجه، از مطالب مربوط به زندگی منتهی با ساختمان مصنوعی، استفاده می‌کردند.»

متنی پیدا شده است که شامل مسائلی مربوط به حـل یک معادلهٔ درجـهٔ سوم است. «ا. نیگه باور» که این متن را منتشر کـرده است، خاطرنشان می‌کند که نیمی از آن در برلن و نیم دیگر آن در لندن است. در تمام این مسائل بایـد طول، عمق و عرض مربوط به حجم زمینی کـه کنده شده است، تعیین کـرد. در آخرین مسئلهٔ این متن صحبت از حل معادلهٔ زیر است:

$$۱۲x^۳ + x^۲ = ۱ + \frac{۴۵}{۶۰}$$

این معادله بصورت زیر درمی‌آید:

$$۱۲x^۳ + ۱۲x^۲ = ۴/۵$$

و بالاخره از جدول مجموع $n^۳ + n^۲$ استفاده می‌شود.

متنهائی پیدا کرده‌اند که در آنها از قضیهٔ فیثاغـورث استفاده شده است. علاوه برآن معلوم شده است که در بابل قدیم، هزارسال قبل از تولد فیثاغورث، نه تنها از قضیهٔ فیثاغورث اطلاع داشتند، بلکه قاعدهٔ ساختن همهٔ مثلث‌های قائم‌-

الزاویه‌ای را هم که ضلعهایشان عددهایی صحیح باشد، میدانسته‌اند.

غیر ممکن است در یک مقالهٔ مختصر بتوانیم از همهٔ آنچه که تاکنون دربارهٔ اطلاعات ریاضی ملل قدیم بین النهرین کشف شده است، صحبت کنیم. مقاله‌هایی از این قبیل تنها می‌تواند تصوری کلی دربارهٔ دوره‌های تاریخی تکامل ریاضیات بدست بدهد. ما فقط متذکر می‌شویم که اطلاعات ما دربارهٔ ریاضیات بابل قدیم از حد کمال خیلی دور است. «**نیگه‌باور**» در این باره می‌نویسد:

«باید یکبار دیگر باین مطلب توجه کرد که برای ما، مدارک فوق‌العاده کمی وجود دارد. از قریب ۱۰۰،۰۰۰ متن میخی که هم اکنون در موزه‌های سراسر جهان وجود دارد، تعداد خیلی کمی به مطالب ریاضی اختصاص دارد. با وجود این (و با توجه باینکه ریاضیات در بابل قدیم در جریان بیش از ۲۰۰۰ سال پیشرفت می‌کرد) باور کردنی نیست که همهٔ ذخیرهٔ ما از متنهای ریاضی تنها همین ۲۰۰ جدول ریاضی ناقص و ۵۰ متن اختصاصی ریاضی (شامل قریب ۵۰۰ مسئله) باشد.

عدم امکان ورود به بعضی از قسمتهای اغلب موزه‌ها و نفرت عمیق اداره کننده‌های آنها نسبت به این قبیل متنها یکی از دلائل اصلی اطلاعات بسیار ناقص ما است.

اگر تنها اشکال کار حوادثی بود که بسیاری از متنها را به نابودی کشید و مانع دیگری برای بررسی متنهای موجود نبود اطلاعات ما خیلی کامل‌تر از این می‌شد».

آنچه را که نقل کردیم، می‌توان با گفته‌های «**م. یا. ویگودسکی**» محقق شوروی تاریخ ریاضی تمام کرد:

«تمام متنهائی که تا کنون بررسی شده است، مسلماً برای آموزش شفاهی بوده‌اند، آیا بابلیهای قدیم، آثار ریاضی از نوع «مقدمات اقلیدس» که جنبهٔ رسائل علمی داشته باشد، داشته‌اند؟ چه بسا که جواب این سؤال منفی باشد. در بابل قدیم هرگونه شغل و مقامی از پدر به پسر به ارث می‌رسید و نه تنها سلطنت، بلکه رهبری مذهب و نگهداری معلومات علمی هم از پدر به پسر منتقل می‌شد.»

وضع چه بوده، ما نمیدانیم؛ ولی بهر حال هیچ متنی که قسمتی از یک

رسالهٔ علمی و یا حتی کتاب درسی باشد بدست ما نرسیده است. همهٔ متنهائی که تاکنون مورد بررسی قرار گرفته عبارتند از مجموعهٔ تمرینها و یا جدولهای محاسبه. ظاهراً اینها اختصاص به تدریس ابتدائی مدرسه‌ای داشته‌اند و این تعلیم، نه فقط در دوران خیلی قدیم، بلکه در دوره‌های نزدیکتر هم جنبهٔ خشک و تعبد-آمیزی داشته است.

و بخصوص در کشوری مثل بابل قدیم میبایستی روح تعبد و مطلق العنانی تثبیت شود. درکشوری که با وجود محیط پر تلاطم سیاسی، مدار زندگی طی سده‌های بسیار برپایهٔ احترام نسبت به سنتهای موجود قرار داشت. در چنین کشوری طبیعی است که اساس تعلیم هم برپایهٔ جمود فکری و تعبد قرار داشته باشد و منطق و استدلال جائی برای خود پیدا نکند. . . ».

بهر حال ما هنوز نمی‌دانیم که مردم قدیم بین‌النهرین از چه راههائی اطلاعات نسبتاً وسیع ریاضی خود را به دست آورده بودند. باید صبر کرد تا با اطلاعات جدیدی که از تحقیقات آینده بدست می‌آید بتوانیم نقش و ارزش تمدن آنها را بهتر ارزیابی کنیم.

۴ ریاضیات ملتهای هند

ا. ای. والودارسکی

مقدمه

ملتهای هند در اعماق تاریخ دارای چنان فرهنگ غنی و ویژه‌ای بودند که اثر فوق‌العاده‌ای در پیشرفت‌فرهنگ کشورهای دیگر باقی گذاشت. حفریاتی که در **موهن جودارو**، **هاراپ** و سایر نقاط سرزمین هند انجام گرفته، ثابت می‌کنند که این نقاط حتی در سه هزار سال قبل از میلاد دارای کانالهای آبیاری و دستگاه آبرسانی شهری بوده‌اند و در بافندگی و هنر جواهرسازی پیشرفت بسیار کرده بودند. در «موهن جودارو» و «هاراپ» فرهنگی غنی وجود داشته است؛ در حفریات، خط کشی بدست آمده است که در دستگاه دهدهی تقسیم‌بندی شده است.

از سدهٔ چهارم قبل از میلاد تا سدهٔ دوازدهم بعد از میلاد دوران موفقیتهای بزرگ در زمینه‌های دستور زبان، طب، ریاضیات، نجوم و سایر علوم در هند است. در سده‌های چهارم و سوم قبل از میلاد **پانینی** دانشمند هندی «دستور» سانسکریت را بوجود آورد. پیشرفتهائی که در رشته‌های شیمی و گیاه شناسی شده بود به تکامل علم طب کمک کرد.

بدون تردید، نجوم هندی بر آثار دانشمندان یونانی تکیه داشت، منتهی دارای جنبه‌های بکر و تازه نیز بود. **آریابهاتای** اول ریاضی‌دان و منجم هندی (سده‌های پنجم و ششم میلادی) معتقد بود که زمین کروی است و دور محور

خود دوران می‌کند. در آثار نجوم هندی حرکت اجرام سماوی با دقت کافی محاسبه شده است. بسیاری از آثار منجمین هندی بعدها به زبانهای دیگر ترجمه شده است.

پیشرفت ریاضیات هندی، مثل همهٔ سرزمینهای دیگر، در ابتدا بر پایهٔ احتیاجات زندگی بوده است. برای ساختمانها لازم بود که مسائل مربوط به محاسبهٔ حجم و سطح را حل کنند، تعداد لازم کارگرها را برآورد نمایند، مزد آنها را بپردازند؛ پیشرفت مبادلهٔ کالا، حل مسائل حساب تجارتی را در مقابل آنها قرار داد و غیره. علوم دیگر، و بخصوص نجوم، هم به پیشرفت ریاضیات کمک کرده‌اند، مثلاً حل معادله‌های سیال با ریشه‌های صحیح و تکامل مثلثات را باید به این جنبه مربوط دانست. باید توجه داشت که اکثر ریاضی‌دانها، در عین حال، منجم هم بوده‌اند.

آثار ریاضی را، مثل همهٔ نوشته‌های علمی، ادبی و مذهبی، به سانسکریت می‌نوشتند.

نقش زبان سانسکریت در هند کاملاً متشابه به نقش زبان لاتینی در اروپای غربی قرون وسطی بود. مطالب ریاضی خیلی به اختصار و بدون اثبات نوشته می‌شد. بسیاری از نوشته‌های ریاضی به نظم درمی‌آمد و به صورت شعر بیان می‌شد. قواعدی، که به صورت بندهای جداگانه بنظم درآمده بود، بخاطر سپرده می‌شد و به این ترتیب در اکثر موارد، تعلیم ریاضی به شکل منجمد و غیر آگاهانه انجام می‌گرفت.

اطلاعات پیشرس زیادی دربارهٔ ریاضیات هندی در رسالهٔ «قانون طنابها» (هفت تا پنج سدهٔ پیش از میلاد) جمع شده است، که در آن از بعضی ساختمانهای هندسی و نتایجی از بعضی محاسبات، طرح شده است. بقیهٔ رساله‌ها در فاصلهٔ بین سده‌های پنجم و شانزدهم میلادی نوشته شده است و در بسیاری از آنها باید قسمتهای مربوط به ریاضی را در بین نوشته‌های نجومی جستجو کرد.

دستگاه قدیمی شمار

بطور کلی این مطلب روشن شده است که دستگاه شمار دهدهی (که بر اساس موضعی بودن رقمها تنظیم شده است)، در هند به درجهٔ کمال خود رسید،

ولی مسائل مربوط به دستگاه شمار قدیمی‌تر هندی و تأثیری که این دستگاه در بوجود آمدن دستگاه موضعی دهدهی داشته است، کمتر روشن شده است.

در هند قدیم دستگاه شمار غیر موضعی (رقمهای **کهاروشتا** و **برهما**، دستگاه شمار لفظی، دستگاه شمار الفبائی) و دستگاه شمار با رقمهای موضعی وجود داشته است.

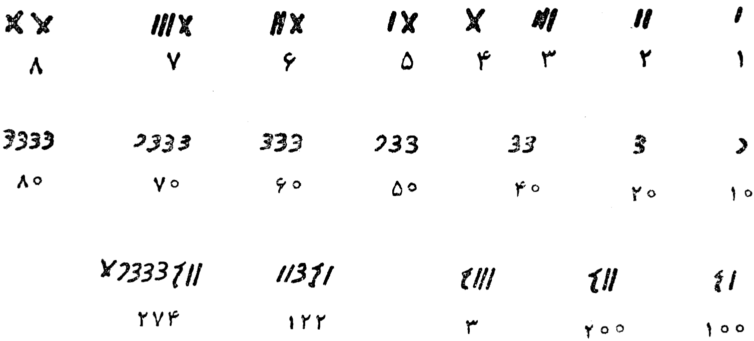
خصوصیت دستگاه شمار هندیها در این است که اکثر مبنا را عدد ۱۰ می‌گرفته‌اند. خصوصیت دیگر آن در تکامل اصطلاحات مربوط به نامگذاری توانهای ۱۰ می‌باشد. در زمانی که در یونان اصطلاحاتی برای نامگذاری بالاتر از $۱۰^۴$ (میریاد) و در روم برای بالاتر از $۱۰^۳$ (میل) نداشتند، در هند عددهای تا $۱۰^{۲۰}$ را نامگذاری کرده بودند.

دستگاههای شمار غیر موضعی را مورد مطالعه قرار دهیم.

ارقام کهاروشتا (شکل ۴) در بسیاری از نوشته‌ها، که در شرق افغانستان امروزی و شمال پنجاب بدست آمده، بکار رفته است. این نوشته‌ها مربوط به فاصلهٔ بین سدهٔ چهارم پیش از میلاد تا سدهٔ سوم بعد از میلاد می‌باشد. در این دستگاه غیر موضعی اعشاری، علامتهای منفردی برای عددهای ۱، ۴، ۱۰، ۲۰، و ۱۰۰ وجود دارد. عددها هم از راست به چپ نوشته می‌شود.

یکانها براساس جمع و به کمک علامتهای ۱ و ۴ نوشته می‌شد و دهها به کمک علامتهای ۱۰ و ۲۰. برای صدها از شکل ضرب استفاده می‌کردند، یعنی علامت صد را می‌گذاشتند و در سمت راست آن تعداد صدهای مورد لزوم را قرار می‌دادند. دستگاه شماری که براساس ضرب تنظیم شده باشد، به دستگاه موضعی خیلی نزدیکتر است تا دستگاهی که براساس جمع درست شده باشد.

تقریباً در سدهٔ ششم پیش از میلاد، در کنار رقمهای «کهاروشتا» بطور وسیعی دستگاه عدد شماری دیگری هم بنام «برهما» بکار می‌رفت (شکل ۵). رقمهای برهما، درمقایسه بارقمهای کهاروشتا، اولا ازچپ به راست نوشته می‌شد، ثانیاً اگر در عدد نویسی کهاروشتا فقط پنج علامت تنها وجود داشت، رقمهای برهما برای واحد، ده، و صد و هزار علامتهای خاصی داشتند و ضمناً ۴، ۵، ۸ و ۱۰ هم با دو علامت شبیه هم نشان داده می‌شد. با شروع از صد، در ارقام برهما از شکل ضربی عددها استفاده می‌کردند.



شکل ۴ عدد نویسی کهاروشتا

رقمهای برهما، بدون تغییر جدی، بیش از ۱۰۰۰ سال بکـار مـی‌رفت. علامتهای انفرادی برای نه عدد اول از عددهای طبیعی، در بسیاری از دستگاههای رقمها، لااقـل از سدهٔ دوم پیش از میلاد وجـود داشته است. وجـود علامتهای اختصاصی را برای عددهای از ۱ تا ۹، که یکـی از خطوط مهم درحساب‌هندی است، باید سرفصل بوجود آمدن عدد نویسی دهدهی موضعی دانست.

دستگاه لفظی در هیچ کشوری به انـدازهٔ هند بطـور وسیع متداول نبوده است. در این دستگاه، رقمها با کلمات مختلف بیان می‌شدند. مثلاً واحد را بـا کلماتی که نمایندهٔ یک شیئی واحد بودند، بیان مـی‌کردند: ماه، زمین. دو را بـا نام اشیائی بیان می‌کردند کـه همیشه بـه یک زوج از آنها برخـورد می‌کنیم: چشمها، لبها، منخرین و غیره. ثبت عـددها بدینگونه، به غنای زبان سانسکریـت و به ذخیرهٔ لغات آن، از جهت وجود مترادفهای بسیار، کمک فراوان کرد، مثلاً کلمهٔ «آسمان» بیش از ۹ مترادف و کلمهٔ «زمین» بیش از ۱۱ متـرادف داشت.

در اینجا کلماتی را که برای رقمها بکار می‌بردند، می‌آوریم:

۰: خالی، آسمان، سوراخ، بیحد (بیش از ۱۵ کلمه).

۱: شروع، ماه، زمین، بدن، برهمن (بیش از ۳۹ کلمه).

۲: توأم، منخرین، چشمها، لبها، زوج (بیش از ۳۰ کلمه).

۳: مقاصد، آشتیها، زمانها، آتش (بیش از ۲۶ کلمه).

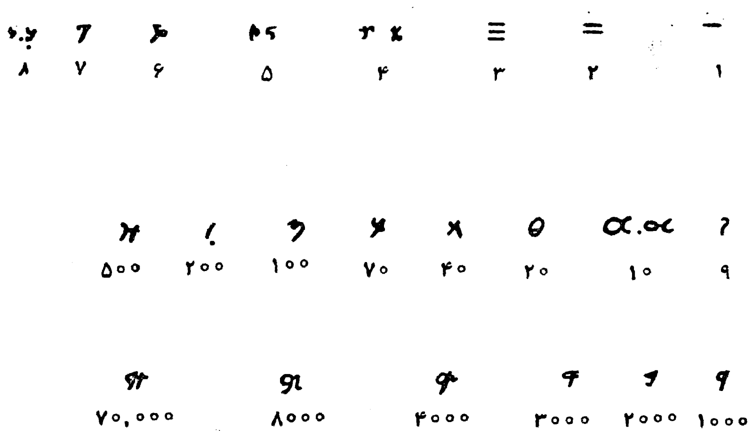
۴: اقیانوسها، طبقه‌ها، دورانهای صلح، مراحل زندگی، قسمتهای عالم (بیش از ۲۹ کلمه).
۵: تیرها، عناصر، اندامهای حسی، قهرمانان افسانه‌ای مهابهارات (بیش از ۹ کلمه).
۶: طعم‌ها، قسمتهای بدن، رنگها (بیش از ۱۶ کلمه).
۷: کوهها، دانشمندان (بیش از ۲۸ کلمه).
۸: مارها، خدایان، آرش‌ها (بیش از ۲۶ کلمه).
۹: الهه‌ها (بیش از ۱۵ کلمه).
۱۰: انگشتان، مظاهر خدای ویشنا (بیش از ۱۰ کلمه).

برای اینکه دستگاه لفظی را خوب بفهمیم، باید از فلسفه، ادبیات، اساطیر و افسانه‌های هندی اطلاع داشته باشیم. البته، عملیات حساب را نمی‌توان بوسیلهٔ دستگاه عددشماری لفظی انجام داد و از آنها فقط برای نوشتن عددها در رساله‌های ریاضی و نجوم استفاده می‌کرده‌اند. دستگاه لفظی خیلی عمومی بود و حتی امروز هم از آن استفاده می‌کنند. ماده تاریخهای لفظی را اساساً از راست به چپ می‌نوشتند، اگر چه گاهی و مثلاً در «رساله» باهشالیسکا (سده‌های ششم تا هشتم میلادی) عددها را از چپ به راست نوشته‌اند. با شروع سده‌های چهارم و پنجم میلادی دستگاه شمار لفظی بصورت موضعی درآمد، که در آن هر رقم (کلمه) بسته به موضع خود معانی مختلفی داشت، ضمناً از بیان مرتبه‌ها هم صرفنظر می‌شد. در کنار کلماتی که به معنای رقمهای مختلف بودند، از کلماتی هم برای بیان صفر بطور وسیع، استفاده می‌شد.

نمونه‌هائی از نوشتن عدد را بصورت دستگاه عدد شماری موضعی لفظی می‌آوریم:

۱۲۳۰: آسمان (۰) ـ زمانها (۳) ـ لبها (۲) ـ زمین (۱).
۳۲۵۱۰۸: زمانها (۳) ـ لبها (۲) ـ تیرها (۵) ـ زمین (۱) ـ آسمان (۰) ـ خدایان (۸).

یکی از معایب دستگاه موضعی لفظی هندیها این بود که برای بیان عددهای بزرگ به جای زیادی احتیاج بود. و این برخلاف میل دانشمندان بود که می‌خواستند مطالب علمی را در حداکثر اختصار و تراکم بنویسند. بهمین مناسبت



شکل ۵ عددنویسی برهما

برای تغییر دستگاه لفظی، درآثار ریاضی و نجومی، دستگاه شمار الفبائی بوجود آمد. فرق دستگاه الفبائی هندیها از دستگاه الفبائی یونانیها، مسلمانها و سایر ملتها در این بود که هندیها در عمل استفادهٔ وسیعی از این دستگاه نمی‌کردند و فقط در رساله‌های ریاضی و نجومی برای نوشتن عددها بکار می‌بردند.

دستگاه الفبائی شمار هم به چند طریق وجود داشت. یکی از آنها از ۱۶ حرف صدادار و ۳۴ حرف بی‌صدای الفبای سانسکریت درست شده است. به این ترتیب که ۳۴ حرف بی‌صدا با اولین حرف صدادار نمایندهٔ عددهای از ۱ تا ۳۴ و همان ۳۴ حرف بی‌صدا با دومین حرف صدادار نمایندهٔ عددهای از ۳۵ تا ۶۸ و غیره بودند. بنابراین عددها طبق قاعدهٔ زیر معین می‌شدند:

$$\text{۳۴}(n-\text{۱})+m$$

که در آن n شمارهٔ ردیف حرف صدادار و m شمارهٔ ردیف حرف بی‌صدا است. مثلاً: ۳ = گا («ک» حرف سوم بی‌صدا و «ا» حرف اول صدادار است): ۱۴۲ = چو («چ» حرف ششم بی‌صدا و «او» حرف پنجم صدادار است).

دستگاه عددنویسی دهدهی موضعی شامل شرایط زیر است:

۱) نوشتن شکل ضربی کمیت ردیف در عدد مفروض؛
۲) حذف علامت واحد ردیف؛
۳) بکار بردن علامت صفر برای ردیفهای خالی؛
۴) قبول عدد ۱۰ به عنوان مبنای دستگاه شمار.

همهٔ این شرایط در سده‌های نخستین میلادی در دستگاههای عددشماری که ذکر کردیم، وجود داشته است. به این ترتیب از هر جهتی که در نظر بگیریم، دستگاه عددشماری دهدهی موضعی در دوره‌ای که از سدهٔ ششم میلادی تجاوز نمی‌کند، در هند به وجود آمده است.

حساب

اگر بسیاری از مطالب دورهٔ مقدماتی هندسهٔ امروزی براساس طرح اقلیدس ریخته شده است، حساب و قسمتی از جبر ما از هند سرچشمه گرفته است.

در حساب و برای عددهای صحیح و کسری ۸ عمل اساسی وجود دارد: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، مجذور کردن، جذر گرفتن، مکعب کردن و کعب گرفتن. دربارهٔ قدرت محاسبهٔ دانشمندان هندی این حقیقت را می‌گویند که برای آنها حتی کعب‌گرفتن جزو عملیات معمولی بشمار می‌رفت، در حالیکه در اروپای غربی قرون وسطی به کسی که می‌توانست مجذور عددی را بدست آورد قدر بسیار می‌گذاشتند.

محاسبه‌ها را روی صفحه‌ای که از ماسه و یا خاک نرم پوشیده بود، انجام می‌دادند. عددها را با قطعه چوب کوچکی می‌نوشتند، برای اینکه عددها بخوبی از هم متمایز باشند، آنها را به اندازهٔ کافی بزرگ می‌نوشتند؛ بنابراین برای بدست آوردن نتیجهٔ محاسبه، ناچار بودند اعمال بینابینی را پاک کنند. و همهٔ اینها در روش محاسبه اثر می‌گذاشت.

عمل جمع را می‌توانستند هم از راست به چپ ــ از مرتبهٔ کوچکتر به طرف مرتبهٔ بزرگتر ــ و هم از چپ به راست ــ از مرتبهٔ بزرگتر به طرف مرتبهٔ کوچکتر ــ انجام دهند.

برای ضرب روشهای مختلفی وجود داشت: ضرب را می‌شد از مرتبهٔ کوچکتر و یا از مرتبهٔ بزرگتر شروع کرد، علاوه بر طریقهٔ کلی ضرب، راههای خاصی هم وجود داشت، مثلاً **شریدهارا** (سده‌های نهم و دهم میلادی) مضروب‌فیه را بترتیب در یکان، دهگان، صدگان و هزارگان مضروب ضرب می‌کرد و سپس نتایج بدست آمده را با هم جمع می‌کرد، مثلاً:

$$۱۲۹۶\times ۲۱=(۱۰۰۰+۲۰۰+۹۰+۶)\times ۲۱=۲۱۰۰۰+ ۴۲۰۰+۱۸۹۰+۱۲۶=۲۷۲۱۶$$

بهاسکارای دوم (سدهٔ دوازدهم) برای سهولت کار، یکی از عوامل ضرب را به صورت مجموع یا تفاضل می‌نوشت؛ مثلاً:

$$۱۳۵\times ۱۲=۱۳۵(۱۲+۸)-۱۳۵\times ۸$$
$$۱۳۵\times ۱۲=۱۳۵(۱۲-۲)+۱۳۵\times ۲$$

عمل تقسیم را با روشی شبیه‌آنچه که امروز وجود دارد انجام می‌دادند.

چون ضمن انجام عملیات حساب، اغلب عملیات بینابینی را پاک می‌کردند، نمی‌شد بطور مستقیم صحت نتیجه را امتحان کرد. برای امتحان ضرب، تقسیم، توان و ریشه، عمل عکس را انجام نمی‌دادند، بلکه از قاعدهٔ معروف به ۹ استفاده می‌کردند. این امتحان براین اساس قرار دارد که باقیماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقیماندهٔ تقسیم مجموع رقمهای آن عدد بر ۹. روشن است که قاعدهٔ ۹ برای امتحان درستی عمل کافی نیست و باید آنرا به طریقهٔ دیگری هم آزمایش کرد.

کسرها از خیلی قدیم، در هند شناخته شده بودند. حتی در «قانون طنابها» (سده‌های هفتم تا پنجم پیش از میلاد) کسرها را به شکلی شبیه امروز نوشته‌اند: صورت را روی مخرج، منتهی بدون خط کسری. هر کسر را از کسر دیگر به وسیلهٔ خطهای افقی و قائم جدا می‌کردند، علامت جمع وجود نداشت و کسرها را برای جمع کردن بدنبال هم می‌نوشتند، مجموع $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ به این

این صورت نوشته می‌شد:

a	c	e
b	d	f

برای علامت تفریق از نقطه یا صلیب کوچک استفاده می‌کـردند، عبارت $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}-\frac{e}{f}$ را به این ترتیب می‌نوشتند:

a	$\cdot c$	$e+$
b	d	f

در کسرهــای مرکب، قسمت صحیــح را روی کسر جـا مــی‌دادند، کسر $a\frac{b}{c}$ را به این ترتیب نشان می‌دادند:

a
b
c

گاهی قسمت صحیح را به صورت کسری بــا مخرج واحـد در نظــر می‌گرفتند، بنابراین کسر مرکـب $a\frac{b}{c}$ را می‌شد چنین نوشت:

a	b
۱	c

یعنی $\frac{a}{۱}+\frac{b}{c}$

برای ضرب، کسرها را بطور متوالی می‌نوشتند، یعنی شبیه جمع:

$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$

و برای تقسیم، یکی را زیر دیگری:

a
b
c
d

یا

a b
c d

قاعدهٔ عمل با کسرها تقریباً هیچ تفاوتی با امروز ندارد. مثلاً، قاعدهٔ جمع کسرها بوسیلهٔ شریدهارا (سده‌های نهم و دهم میلادی) چنین توضیح داده شده است: «کسرها را بیک مخرج تبدیل کنید و سپس صورتها را جمع کنید»، و برای قاعدهٔ ضرب: «صورتها را ضرب کنید و برحاصلضرب مخرجها تقسیم کنید، حاصلضرب دو یا چند کسر بدست می‌آید».

بـه عنوان مخرج مشترك در ابتدا حاصلضرب مخرجها را در نظر می‌گرفتند، ولی از اوایل سدهٔ نهم کوچکترین مضرب مشترک مخرجها را پیدا می‌کردند، مثلاً شریدهارا می‌نویسد: «برای اینکه دو کسر را بیک مخرج تبدیل کنیم، ابتدا عامل مشترك دو مخرج را کنار می‌زنیم (اگر چنین عاملی وجود داشته باشد) و سپس عددی که در هر مخرج می‌ماند در صورت و مخرج کسر دیگر ضرب می‌کنیم».

قاعدهٔ سه مقدار، پنج مقدار وغیره، عکس قاعدهٔ سه مقدار، مسائل مربوط به اختلاط و امتزاج، در صد و تقسیم به نسبت، جای مهمی را در مسائل مربوط به حساب هندی اشغال کرده است. اگر یونانیها و مصریها هم قاعدهٔ سه مقدار را بکار می‌بردند، ولی هندیها آنرا به عنوان قانونی از حساب در نظر می‌گرفتند و از آن به عنوان یک روش حل استفاده می‌کردند.

قاعدهٔ سه مقدار عبارت است از جستجوی عدد x، که با سه عدد مفروض

a ، b و c یک تناسب تشکیل دهد:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$$

یک راه حل غیرمتعارف هم خیلی معمول بود، اگر مسئله‌ای منجر به حل معادلهٔ:

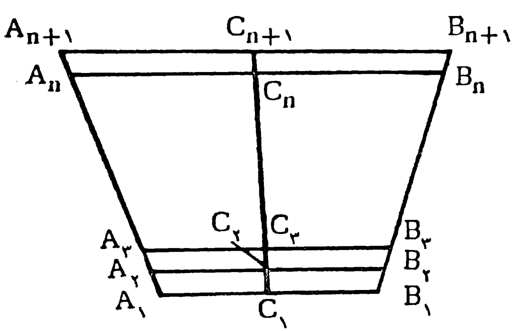
$$ax=c$$

می‌شد، جواب آن بصورت زیر نوشته می‌شد:

$$x=x_1\cdot\frac{c}{c_1},$$

که در آن x_1 عددی است دلخواه، و c_1 مقدار متناظری است که از قرار دادن x_1 در معادله، برای c بدست می‌آید.

ریاضی‌دانهای هندی مسائل مربوط به تصاعدهای حسابی و هندسی راحل می‌کردند؛ ضمناً «شریدهارا» تعبیر هندسی تصاعد حسابی را بصورت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی که ارتفاع آن مساوی تعداد جمله‌های تصاعد است، داده است (شکل ۶)، مساحت $B_1\ B_2\ A_2\ A_1$ با ارتفاع $C_2\ C_1$ مساوی واحد، عددی است برابر با جملهٔ اول تصاعد، یعنی a ؛ مساحت $B_1\ B_3\ A_3\ A_1$ با ارتفاع



شکل ۶

$c_{۳}$ $c_{۱}$ مساوی دو واحد، عددی است برابر با مجموع دو جمله از تصاعد، یعنی $۲a+d$ و غیره و بالاخره، مساحت تمام ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

$$A_{۱}A_{n+۱}B_{n+۱}B_{۱}$$

عددی است برابر مجموع تمام جمله‌های تصاعد حسابی

«شریدهارا» حتی مجموع $S_n+\frac{p}{q}(a+nd)$ تصاعد حسابی با «تعداد کسری جمله‌ها» $(n+\frac{p}{q})$ را هم پیدا کرد، که در آن S_n مجموع n جملهٔ تصاعد و $\frac{p}{q}(a+nd)$ به معنی $\frac{p}{q}$ جملهٔ $(n+۱)$ام تصاعد است:

او مسئلهٔ زیر را حل کرد: «اگر کارگری برای ماه اول $۱\frac{۱}{۲}$ روپیه دریافت کند، و در هر یک از ماههای بعد $\frac{۱}{۳}$ روپیه بیش از ماه قبل بگیرد، بعد از $۳\frac{۱}{۲}$ ماه چقدر خواهد گرفت؟» کارگر دریافت می‌کند:

$$S_{۳}+\frac{۱}{۲}\left(۱\frac{۱}{۲}+۳\times\frac{۱}{۳}\right)=۵\frac{۱}{۲}+۱\frac{۱}{۴}=۶\frac{۳}{۴}\ \text{(روپیه)}$$

جبر

دانشمندان هندی در زمینهٔ جبر موفقیتهای زیادی بدست آوردند، آنها روی علامتها و مظاهر جبرکار کردند، قاعدهٔ حل معادلهٔ درجه دوم را تعمیم دادند، عددهای منفی و گنگ را وارد عمل کردند. برای مقادیر مجهول، جملهٔ ثابت معادله و توان علامتهائی‌قرار دادند، ضمناً بسیاری از این علامتها خلاصهٔ اصطلاح سانسکریتی متناظر آنها بود.

مقدار مجهول را **یاوات ـ تاوات** (همان اندازه که) می‌نامیدند و برای علامت مجهول از هجای اول کلمهٔ اول سانسکریتی آن استفاده می‌کردند: «یا».

اگر با چند مجهول سر و کار داشتند، آنها را با کلماتی که به رنگهای مختلف نوشته می‌شد، نشان می‌دادند.

جملهٔ ثابت معادله را با «رو» هجای اول کلمهٔ «روپا» (روپیه = کامل) مشخص می‌کردند.

برای توان از کلمه‌های «وارگا» (مربع) «گهانا» (مکعب) و «گهاتا» استفاده می‌کردند. مثلاً توان ششم را «وارگا ـ گهانا» می‌گفتند. از اصطلاح «گهاتا» برای جمع توانها استفاده می‌شد؛ مثلاً توان پنجم را «وارگا-گهانا-گهاتا» می‌نامیدند.

علامت توان را بعد از علامت مقدار مجهول و ضریب را بعد از مجهول می‌گذاشتند. بین جمله‌ها علامتی وجود نداشت؛ وقتی که جمله‌ها را پشت سرهم می‌نوشتند به معنای جمع بود؛ در مورد تفریق؛ روی جملهٔ مفروق‌منه نقطه‌ای قرار می‌دادند. گاهی هم برای علامت تفریق ازصلیب کوچک استفاده می‌کردند که بعد از عدد قرار می‌گرفت. مثلاً ۵ — را به‌صورت ۵̊ یا +۵ می‌نوشتند.

علامت تساوی در معادله‌ها وجود نداشت: دو طرف معادله را زیر هم می‌نوشتند، به این ترتیب که مجهولات و توانهای مربوطهٔ یکطرف معادله زیر همان مجهولها و توانهای مربوطهٔ طرف دیگر نوشته می‌شد. اگر در موردی مجهولی وجود نداشت آنرا با ضریب «صفر» می‌نوشتند. مثلاً معادلهٔ:

$$197x-1644y-z=6302$$

چنین نوشته می‌شد:

یا	۱۹۷	کا	۱۶۴۴̇	نی	۱̇	رو	۰
یا	۰	کا	۰	نی	۰	رو	۶۳۰۲

یعنی:

$$197x-1644y-z+0=0x+0y+0z+6302$$

یا مثلاً معادلهٔ:

$$8x^3+4x^2-10y^2=4x^3+12y^2$$

چنین نوشته می‌شد:

۱۰ وا کا ۴ وا یا ۸ گها یا
۱۲ وا کا ۰ وا یا ۴ گها یا

به این ترتیب دانشمندان هندی قدم بزرگی در مورد بوجود آمدن جبر علامتی برداشتند، اگرچه علامتهائی که بکار می‌بردند زیاد بود و خود علامتها، یعنی حروف سانسکریت، دارای شکل بغرنجی بودند.

عددهای منفی را برای نخستین بار **براهماگوپتا** (سدهٔ هفتم میلادی) بکار برد، او عددهای مثبت را به‌عنوان «دارائی» و عددهای منفی را به عنوان «قرض» تلقی می‌کرد. قانون چنین است: «مجموع دو دارائی یک دارائی و مجموع دو قرض یک قرض است». حاصلضرب دارائی و قرض عبارتست از قرض، حاصلضرب دو دارائی یا دو قرض عبارتست از دارائی».

برای نخستین بار در آثار **آریابهاتای** اول (سده پنجم و ششم میلادی) به معادله‌های خطی برخورد می‌کنم. یکی از مسائل مشهور آریابهاتا که در ادبیات جبری به مقیاس جهانی اثر گذاشته است «مسئلهٔ قاصدها» است. در این مسئله باید زمان تلاقی دو کوکب آسمانی را که با سرعتهای $V_۱$ و $V_۲$ درحرکتند و فاصلهٔ بین آنها S است، بدست آورد. جواب آریابهاتا چنین است:

$$t = \frac{S}{V_۱ - V_۲}$$

در نوشته‌های **مهاویرا** (سدهٔ نهم) بیک رشته مسائل برخورد می‌کنیم که به دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی درجه اول منجر می‌شود. مثلاً مسئلهٔ: «قیمت ۹ لیمو و ۷ سیب جنگلی رویهم ۱۰۷ و قیمت ۷ لیمو و ۹ سیب جنگلی رویهم ۱۰۱ شده است. حالا به سرعت قیمت لیمو و سیب جنگلی را بطور جداگانه برای من نام ببرید»، منجر به دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} ۹x + ۷y = ۱۰۷ \\ ۷x + ۹y = ۱۰۱ \end{cases}$$

روشی که امروز برای حل چنین دستگاهی، به کمک مساوی کردن ضریبها،

بکار می‌برند، هیچ تفاوتی با روش مهاویرا ندارد.
معادله‌های بصورت:

$$Ax^{۲} = Bx \text{ و } Ax^{۳} = Bx^{۲}$$

جزو معادله‌های درجه اول به حساب می‌آمد. مثلاً **بهاسکارای** دوم مسئلهٔ زیر را حل می‌کند: «چهار کسر پیدا کنید که مخرجهای آنها با هم برابر باشد و مجموع مربعهای آنها مساوی مجموع مکعبهای آنها شود».

راه حل بهاسکارای دوم را در مورد این مسئله به‌زبان امروزی جبر بیان می‌کنیم. مخرجها را مساوی واحد فرض می‌کنیم؛ کسر اول را به x، کسر دوم را به $۲x$، کسر سوم را به $۳x$ و بالاخره کسر چهارم را به $۴x$ نشان می‌دهیم. مجموع مربعهای کسرهای مساوی $۳۰x^{۲}$ و مجموع مکعبهای آنها $۱۰۰x^{۳}$ می‌شود. از تساوی:

$$۳۰x^{۲} = ۱۰۰x^{۳}$$

معلوم می‌شود که کسر اول مساوی $\frac{۳}{۱۰}$، کسر دوم $\frac{۶}{۱۰}$ کسر سوم $\frac{۹}{۱۰}$ وکسر چهارم معادل $\frac{۱۲}{۱۰}$ است.

به حل معادلهٔ کامل درجه دوم برای نخستین‌بار در نوشته‌های **آریابهاتای** اول برخورد می‌کنیم. مسئله پس از یک رشته عملهای کم و بیش بغرنج منجر به معادلهٔ زیر می‌شود:

$$tx^{۲} + px = qp,$$

که جواب آنرا آریابهاتا چنین می‌دهد:

$$x = \frac{\sqrt{qpt + \left(\frac{p}{۲}\right)^{۲}} - \frac{p}{۲}}{t}$$

بهاسکارای دوم از اینکه جذر یک عدد مثبت، دو جواب دارد، اطلاع

داشت. او می‌نویسد: «جذر یک عدد مثبت، گاهی مثبت و گاهی منفی است. مجذورعدد مثبت ۳ یا عدد منفی ۳ برابر است با ۹، بنابراین جذر عدد مثبت ۹، بسته به احتیاجی که داریم، ممکن است عدد مثبت ۳ و ممکن است عدد منفی ۳ باشد. ولی اگرکسی سؤال کند که جذر عدد منفی ۹ چقدر است، جواب معقولی نداریم، زیرا هرگز مجذور یک عدد نمی‌تواند مساوی یک عدد منفی بشود».

بهاسکارای دوم بعضی از معادله‌های خاص درجه سوم و چهارم را مورد مطالعه قرار می‌دهد وریشه‌های صحیح آنها را از راه بعضی تبدیلهای ساده بدست می‌آورد.

مثلاً برای حل معادلهٔ

$$x^{۴} - ۲x^{۲} - ۴۰۰x = ۹۹۹۹$$

بهاسکارا به دو طرف معادله عبارت

$$۴x^{۲} + ۴۰۰x + ۱$$

را اضافه می‌کند، در اینصورت بدست می‌آید:

$$x^{۴} + ۲x^{۲} + ۱ = ۴x^{۲} + ۴۰۰x + ۱۰۰۰۰$$

سپس از دو طرف معادله جذر می‌گیرد و بدست می‌آورد:

$$x^{۲} + ۱ = ۲x + ۱۰۰$$
$$x^{۲} - ۲x = ۹۹$$
$$x = ۱۱$$

هندیها موفقیتهای زیادی در زمینهٔ حل معادله‌های سیال بدست آوردند؛ بعضی مسائل مربوط به تقویم نجومی، که درآنها باید دورهٔ تناوب وضع متناظر مشخصی را برای ستاره‌های بادورهٔ گردشهای مختلف پیدا کرد، منجر به معادله‌های سیال می‌شوند.

ریاضی‌دانهای هندی، بدون اینکه ازکارهای دیوفانت (سدهٔ سوم) اطلاعی داشته باشند، با جستجوی جوابهای گویا، طریقهٔ پیدا کردن جوابهای صحیح و

مثبت معادله‌های سیال را بدست آوردند.

حل معادلهٔ خطی دو مجهولی

$$ax+b=cy$$

و راه پیدا کردن جوابهای صحیح آنرا، آریابهاتای اول داد، ولی در نوشته‌های براهما گوپتا و بهاسکارای دوم با تفصیل بیشتری آمده است. این طریقه که به روش «پراکندگی» معروف شده است، در اساس با طریقهٔ حلی که امروزه بنام کسرهای مسلسل وجود دارد، تفاوتی ندارد.

موفقیت بزرگی که هندیها در نظریهٔ اعداد بدست‌آوردند، مربوط به پیدا- کردن ریشه‌های صحیح و مثبت معادلهٔ

$$y^۲=ax^۲+b$$

و حالت خاص ولی مهم آن

$$y^۲=ax^۲+۱$$

(a عدد صحیح غیر مجذور کامل است) می‌باشد.

دانشمندان هندی به پیدا کردن تنها یکی از ریشه‌های مثبت و صحیح معادله اکتفا می‌کردند، ولی این نقص ارزش اهمیت کار آنها و موفقیتی راکه بدست آوردند کم نمی‌کند.

حل دقیق و کامل این معادله‌ها بعدها در سال ۱۷۶۹ به وسیلهٔ **لاگرانژ** ریاضی‌دان فرانسوی داده شد که روش او به طریقهٔ عمل هندیها خیلی نزدیک است.

براهماگوپتا و بهاسکارای دوم انواع دیگری از معادله‌های سیال را هم مورد بررسی قرار دادند، مثلاً:

$$ax+by+c=xy$$

در مورد این معادله، عدد $ab+c$ را به صورت ضرب دو عامل $m\cdot n$ تجزیه می‌کردند، $m+b$ یا $n+b$ را به عنوان x و $n+a$ یا $m+a$ را به

عنوان مقدار متناظر y انتخاب می‌کردند. مثلاً معادلهٔ

$$۱۰x + ۱۴y - ۵۸ = ۲xy$$

را در نظر می‌گیریم، ابتدا دو طرف معادله را به ۲ ساده می‌کنیم:

$$۵x + ۷y - ۲۹ = xy$$

داریم:

$$ab + c = ۶ = ۶ \times ۱ = ۳ \times ۲$$

و جوابها چنین‌اند:

$$\left| \begin{array}{l} x = ۱۳ \\ y = ۶ \end{array} \right. \quad \text{ز} \quad \left| \begin{array}{l} x = ۱۰ \\ y = ۷ \end{array} \right. \quad \text{ز} \quad \left| \begin{array}{l} x = ۸ \\ y = ۱۱ \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x = ۹ \\ y = ۸ \end{array} \right.$$

هندسه

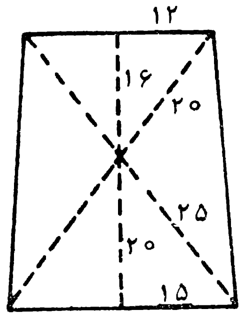
اطلاعات ریاضی‌دانهای هندی در زمینهٔ هندسه و موفقیتهائی که در این زمینه بدست آوردند، در مقایسه با دانش آنها در زمینهٔ حساب، جبر و نظریهٔ اعداد، اهمیت کمتری دارد.

احکام هندسی را در اکثر موارد بدون اثبات ذکر می‌کردند و اغلب همه چیز منجر به مراجعه به شکل می‌شد و با یک جملهٔ «دیده می‌شود» اثبات شده تلقی می‌شد و تنها در موارد نادری اشاره‌های استدلالی وجود داشت. احتمالاً برای تعلیم، اثبات آنها بطور شفاهی گفته می‌شد.

نخستین اطلاعات مربوط به هندسه را می‌توانیم ازرسالهٔ «قانون طنابها» بدست آوریم، که در حقیقت یک رسالهٔ دستی برای معماران قدیمی است که در کار ساختمان محرابها و معابد مورد استفاده قرار می‌دادند. ساختمان معابد تابع قوانین چندی بود: سمت آنها بایستی بطرف نور می‌بود و در پایه‌ها شکلهای معینی قرار می‌گرفت. این مطلب مستلزم حل یک رشته مسائل هندسی بود: ساختن زاویهٔ قائمه، مربع، مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع آن با عددهای صحیح بیان شده باشد، ساختن مربع معادل با مستطیل ، ساختن مربعی با مساحت

na با مفروض بودن مربع به مساحت a.

بسیاری از این ساختمانهـای هندسی بر مبنـای قضیهٔ **فیثاغورث** انجـام می‌گرفت. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع آن با عددهـای صحیح بیـان شده است، می‌توان مثلث متساوی‌الساقینی، مطابق شکل ۷، ساخت.



شکل ۷

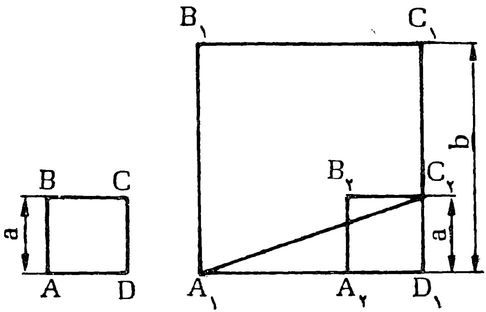
تبدیل مربع به‌مساحت a به مربعی با مساحت na منجر به دو عمل می‌شد: اولاً دو برابر کردن یک مربع (که برای آن، قطر مربع اول را به عنوان ضلع مربع جدید انتخاب می‌کـردند)، ثانیاً ساختن مربعی معادل با دو مربع مفروض. برای این منظور، مربع کوچکتر را داخل مربع بزرگتر قرار می‌دادند، همانطور که از شکل ۸ دیده می‌شود، در اینصورت خواهیم داشت:

$$A_1C_2=\sqrt{a^2+b^2}$$

مربع به‌ضلع A_1C_2 مساحتی مساوی مجموع مساحتهای دو مربع خواهد داشت، زیرا داریم:

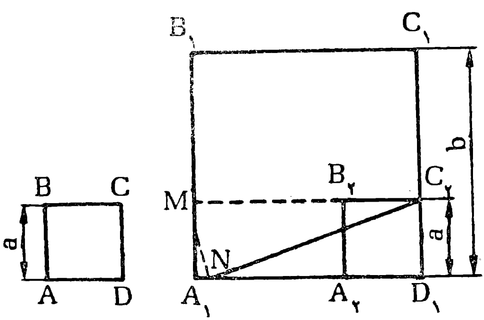
$$A_1C_2^2=a^2+b^2$$

در همین رساله، طریقهٔ رسم مربعـی هم که مسـاحت آن مساوی تفـاضل مساحتهای دو مربع مفروض باشد، داده شده است.



شکل ۸

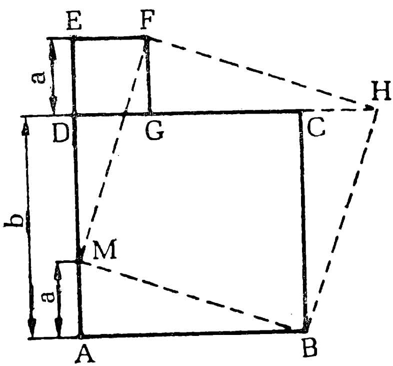
برای این منظور مربع کوچکتر را در داخل مربع بزرگتر قرار می‌دهیم (شکل ۹)، سپس به مرکز $C_۲$ و بشعاع مساوی ضلع b، قوسی رسم می‌کنیم تا ضلع $A_۱D_۱$ را قطع کند. در اینصورت پاره خط $ND_۱ = \sqrt{b^۲ - a^۲}$ مساوی با ضلع مربع مجهول خواهد بود. خود قضیهٔ فیثاغورث را هم می‌توان با ساختن مربعی معادل با مجموع دو مربع دیگر اثبات کرد.



شکل ۹

از شکل ۱۰ روشن است که مساحت مربع به ضلع MB برابر است با مجموع مساحتهای مربعهای به‌اضلاع AD و DE، زیرا مثلثهای MEF، FHG،

CHB ، و MBA با هم برابرند.



شکل ۱۰

در زمینهٔ هندسه، اطلاعات زیر را می‌توان در آثار **براهماگوپتا**، **شریدهارا**، **مهاویرا** و **بهاسکارای دوم** پیدا کرد. **براهماگوپتا** رابطهٔ تقریبی برای محاسبهٔ مساحت هرچهار ضلعی دلخواه می‌دهد (از این رابطه مصریها هم استفاده می‌کرده‌اند):

$$S \# \frac{a+c}{۲} \cdot \frac{b+d}{۲}$$

که در آن a ، c ، b و d ضلعهای متقابل در چهارضلعی هستند.

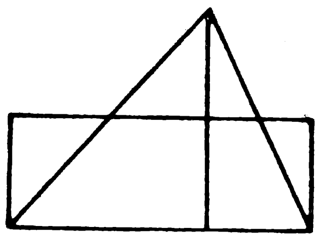
شریدهارا ، ضمن اینکه خاطرنشان می‌کند که این رابطه را نمی‌توان برای همهٔ چهارضلعی‌ها بکار برد، رابطهٔ مساحت ذوزنقه را بدست می‌دهد: حاصلضرب نصف مجموع قاعده‌ها در ارتفاع.

براهماگوپتا، برای محاسبهٔ مساحت چهار ضلعی از رابطهٔ زیر هم استفاده می‌کرد:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

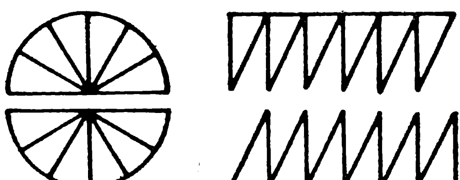
که در آن a ، b ، c و d ضلعهای چهارضلعی و p نصف محیط آنست. این رابطه تنها برای چهارضلعی‌های محاطی صحیح است. **براهماگوپتا** این مطلب را قید نمی‌کند. اگر چه دو نوع چهار ضلعی (یعنی ذوزنقه متساوی‌الساقین و چهار ضلعی‌هائی که قطرهای عمود برهم دارند) را مورد مطالعه قرار می‌دهد که این رابطه دربارهٔ آنها صادق است.

همانطور که یادآوری کردیم، استدلالهای هندسی کوتاه است. مثلاً برای اثبات قضیهٔ مربوط به مساحت مثلث، شکل ۱۱ داده شده است، که در آن ارتفاع مستطیل مساوی نصف ارتفاع مثلث است. شکل با جملهٔ «دیده می‌شود» همراه



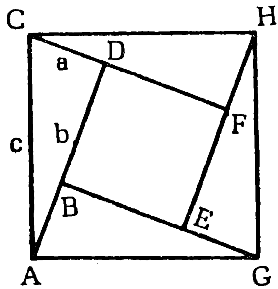
شکل ۱۱

است. اثبات قضیهٔ مربوط به مساحت دایره، که برابر است با مساحت مستطیلی که اضلاع آن بترتیب نصف محیط دایره و شعاع دایره باشد، براساس شکل ۱۲ و باز با جملهٔ «دیده می‌شود»، داده شده است. اثبات قضیهٔ فیثاغورث، آنطور که



شکل ۱۲

بهاسکارای دوم داده است، براساس شکل ۱۳ قرار دارد.



شکل ۱۳

چون همهٔ مثلثها با هم برابرند، بنابراین

$$S_{ACHG} = ۴S_{ADC} + S_{BEFD} \qquad (۱)$$

که در آن داریم:

$$S_{ACHG} = c^۲,\ S_{ADC} = \frac{ab}{۲}, S_{BEFD} = (b-a)^۲$$

بنابراین:

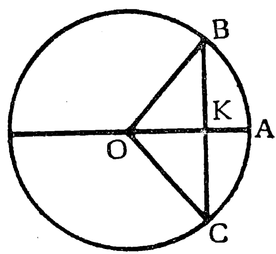
$$c^۲ = \frac{۴ab}{۲} + (b-a)^۲,$$
$$c^۲ = ۲ab + b^۲ - ۲ab + a^۲$$
$$c^۲ = a^۲ + b^۲$$

آریابهاتای اول، برای اندازه‌گیری‌دایره مقدار $\pi = ۳/۱۴۱۶$ می‌گیرد. **نیلاکانتا** (سده‌های پانزدهم و شانزدهم میلادی)، مقدار π را تا ۱۰ رقم صحیح اعشاری حساب کرده است.

مثلثات

پیشرفت مثلثات بطور جدی به مسائل عملی مثلثات مربوط است. در هند پایه‌های مثلثات، به عنوان آموزش مقادیر مثلثاتی، گذاشته شد، اگر چه خیلی‌کم دربارهٔ حل مثلث توفیق پیدا کردند. از توابع مثلثاتی، **سینوس**، **کسینوس** و **سینوس ـ ورزوس** برای آنها معلوم بود.

ریاضی‌دانهای هندی بر خلاف یونانیها از نصف وتر، بجای تمام آن، استفاده می‌کردند. اگر شعاع OB را واحد بگیریم (شکل ۱۴)، در اینصورت سینوس زاویهٔ BOK مساوی نسبت $\frac{BK}{OB}$، که از لحاظ عددی مساوی طول BK است، می‌شود و پاره خط OK مساوی کسینوس زاویهٔ BOK خواهد بود.



شکل ۱۴

از رابطه‌های بین توابع مثلثاتی، رابطه‌های زیر معلوم بود:

$$\sin^۲ a + \cos^۲ a = ۱$$

$$\sin a = \cos(۹۰^\circ - a),$$

$$۱ - \cos a = ۲\sin^۲ \frac{a}{۲}$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$$

مقادیر مثلثاتی را تنها در حد ربع اول دایره مورد مطالعه قرار می‌دادند. برای استفاده از مثلثات در نجوم، جدولها نقش اساسی دارند. دانشمندان

هندی جدول وترها را، خیلی دقیق‌تر از منجمین یونانی و بطلمیوس (سدهٔ دوم) تنظیم کردند.

در رساله‌ها بطور مبهم بعضی از قضایای مثلثات کروی هم وجود دارد، مثلاً قضیهٔ سینوسها در مثلث قائم‌الزاویه و یا حتی قضیهٔ کلی کسینوسها.

در بسیاری از کتابهای مربوط به تاریخ ریاضی گفته شده است که ریاضی‌دانهای هندی بعد از **بهاسکارای دوم** تا ابتدای سدهٔ بیستم هیچ مطلب اساسی کشف نکرده‌اند. ولی در حقیقت چنین نیست. موفقیت جالب و مهم ریاضی‌دانهای سدهٔ شانزدهم عبارتست از تبدیل تانژانت و آرک تانژانت به صورت رشته‌های بی‌نهایت.

دانشمندان سده‌های ششم تا دوازدهم، عدد π را در بهترین مورد خود، تا پنج‌رقم اعشاری‌میدانستند. **نیلاکانتا**، دانشمند هندی قرن شانزدهم، رشتهٔ بی‌نهایتی را می‌دهد (بدون اثبات) که به زبان علامتهای امروزی چنین است:

$$r\varphi=\frac{r\sin\varphi}{\cos\varphi}-\frac{r\sin^{۳}\varphi}{۳\cos^{۳}\varphi}+\frac{r\sin^{۵}\varphi}{۵\cos^{۵}\varphi}-\cdots$$

با فرض $\sin\varphi\leqslant\cos\varphi$.

به ازاء $r=۱$ خواهیم داشت:

$$\varphi=\mathrm{tg}\varphi-\frac{\mathrm{tg}^{۳}\varphi}{۳}+\frac{\mathrm{tg}^{۵}\varphi}{۵}-\cdots$$

نیلاکانتا برای محاسبهٔ π فرض می‌کند $\varphi=۴۵^\circ$ و ضمناً $\frac{\pi}{۴}$ را به صورت مجموع محدود S_n با جملهٔ متمم $k_n^{(i)}$ نشان می‌دهد، که سه شکل مختلف دارد:

$$\frac{\pi}{۴}=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\cdots+\frac{(-)^{n-۱}}{۲n-۱}+K_n^{(i)}(II)$$

که در آن داریم:

$$K_n^{(۱)}=\frac{(-۱)^n}{۴n},\ K_n^{(۲)}=\frac{(-۱)^n\cdot n}{۲n^۲-۱},$$
$$K_n^{(۳)}=\frac{(-۱)^n(n^۲+۱)}{n(۴n^۲+۵)}$$

و ضمناً :

$$\left|K_n^{(۱)}\right|>\left|K_n^{(۳)}\right|>\left|K_n^{(۲)}\right|$$

این جمله‌های متمم، حتی برای مقادیر نسبتاً کوچک n، خیلی خوب تقریب را اصلاح می‌کند. مقداری که **نیلاکانتا** برای عدد π می‌دهد، دارای ۱۰ رقم است.

کارهای دیگر ریاضی‌دانهای سدهٔ شانزدهم هندی هم جالب است. آنها از رابطه‌ای اطلاع داشتند که به زبان علامتهای امروزی چنین است:

$$\mathrm{arctg}t=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\sum_{K=۰}^{n-۱}\frac{\frac{t}{n}}{۱+\left(\frac{Kt}{n}\right)^۲}\ (III)$$

آنها از بسط سینوس و کسینوس هم بصورت یک رشته اطلاع داشتند:

$$r\sin\varphi=S-\frac{S^۳}{۳!r^۲}+\frac{S^۵}{۵!r^۴}-\dots$$
$$r\cos\varphi=S-\frac{S^۲}{۲!r}+\frac{S^۴}{۴!r^۳}-\dots$$

که در آن S مساوی طول قوس متناظر زاویهٔ φ است.

به این ترتیب ریاضی‌دانهای هندی در سال ۱۵۰۲ برای نخستین بار و ۱۷۰ سال قبل از ج. **گریگوری** و **لایبنیتس** توانستند arctgx را بصورت رشته‌ای از توانهای x بسط دهند و بخصوص از رشته‌ای که بنام **گریگوری**

برای $\frac{\pi}{4}$ وجود دارد، اطلاع داشتند، این رشته بعدها در سال ۱۶۷۱ بوسیلهٔ **گریگوری** و در سال ۱۶۷۳ بوسیلهٔ **لایبنیتس** دوباره کشف شد. بقیهٔ رشته‌هائی را هم که هندیها بدست آورده بودند، در اروپا قبل از نیمهٔ دوم سدهٔ هفدهم شناخته نشد، تساوی (III) را **اولر** در سال ۱۷۳۹ توانست پیدا کند.

درست است که این افکار و بسیاری دیگر نتوانست به اندازهٔ کافی رشد کند، ولی همین گامهای اولیه‌ای که دانشمندان هندی در زمینهٔ دستگاه موضعی اعشاری، قوانین حساب، مقدمات مثلثات و یک رشته قواعد جبر و نظریهٔ اعداد در اواخر سدهٔ سیزدهم، برداشتند، ابتدا در کشورهای شرق میانه و نزدیک و سپس در اروپا، اثر فوق‌العاده‌ای گذاشت و امکان تکامل بعدی ریاضیات را بوجود آورد.

۵ تاریخ کسرهای اعشاری در چین

ای. برزکینا

در این اواخر اطلاعات تازه و جالبی دربارهٔ تاریخ کسرهای اعشاری بدست آمده است. ضمن مطالعهٔ یکی از رساله‌های قدیمی چینی «رسالهٔ ریاضی سون‌تسه‌زی» که تقریباً مربوط به سدهٔ سوم میلادی است، روشن شده است که در آن زمان کسرهای اعشاری را می‌شناخته‌اند[1] و این خیلی قدیمی‌تر از زمانی است که معمولاً ازاستعمال کسرهای اعشاری صحبت می‌کنند.

معمولاً سال رسمی بوجود آمدن کسرهای اعشاری‌را ۱۵۸۵، یعنی سالی که **سیمون ستون** (۱۵۴۸ــ۱۶۲۰) کتاب خود را منتشر کرد، می‌دانند. از این زمان کسرهای اعشاری بطور جدی وارد در ریاضیات شد و در دسترس هرکسی که به تحصیلات مدرسه‌ای اشتغال داشت، قرار گرفت.

با مطالعهٔ تاریخ، این مطلب هم امروز روشن شده است که قبل از **ستون** در کشورهای شرق از کسرهای اعشاری استفاده می‌کرده‌اند. **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** ریاضیدان ایرانی در کتاب خود به نام «مفتاح‌الحساب» (۱۴۲۷)، شرح کاملی از عملهای باکسرهای اعشاری را می‌دهد.

مقایسهٔ روش ساختن کسرهای اعشاری در چین با روشی که مورد استفادهٔ

۱ــ از مؤلف این رساله اطلاعی نداریم، رساله یکی از ده قسمتی است که در مجموعهٔ «ده کتاب ریاضی» در عصر **تان** «سده‌های هفتم تا نهم» وارد شده است. این مجموعه به عنوان کتاب درسی در چین قرون وسطی تنظیم شده بود.

کاشانی و ریاضی‌دانهای اروپایی بوده است، این مطلب را روشن می‌کند که مدارک چینی برای تاریخ علم برتری خاصی دارد. **کاشانی** و دانشمندان اروپایی، کسرهای اعشاری را به قیاس عدد شماری شصتگانی[۱] ساختند، در حالی که در چین بطور مستقل و بدون استفاده از کسرهای شصتگانی (که هرگز در چین مورد استفاده قرار نگرفته است) بوجود آمد. از مدتها قبل از آن هم دستگاه عددشماری‌اعشاری در چین بوجودآمده بود[۲]. بنابراین سیر بوجودآمدن کسرهای اعشاری در تاریخ ریاضیات چین به صورت «خالص» خود بوده است. «رسالهٔ ریاضی سون تسه‌زی»، که مورد مطالعهٔ ما در این مقاله است، به ما امکان می‌دهد که مراحل اساسی راه پرپیچ و خم بوجود آمدن این مفهوم جدید ریاضی را بطور روشن بررسی کنیم. مثل فسیل‌شناسی که با مطالعهٔ حیوان فسیل‌شده مراحل متحجر شدن آنرا بررسی می‌کند، به تجدید ساختمان مفهوم کسر اعشاری در دوره‌های مختلف تکامل آن می‌پردازیم. درک چینی، با وجود منحصر بفرد-بودن آن، دارای اهمیت فوق‌العاده‌ای است. در مورد بوجود آمدن کسرهای بابلی به خاطر عدم دسترسی به منابع قابل اعتماد و به خاطر نوع دستگاه عدد-شماری آنها، تقریباً نمی‌توان قضاوت کرد.

۱ــ کشف دستگاه عددنویسی موضعی شصتگانی مربوط به بابلیها است. آنها در ابتدا علامتی برای صفر نداشتند و عددی را که می‌نوشتند می‌شد به عنوان عددی صحیح یا عددی کسری قبول کرد.

بعدها منجمین دورهٔ **الینی** از یک نوع عددنویسی مختلط استفاده می‌کردند: قسمت صحیح را با دستگاه غیر موضعی اعشاری و قسمت‌کسری را با دستگاه شصتگانی می‌نوشتند. در هند، کشورهای اسلامی شرق و اروپای قرون وسطی با این کسرها آشنا بودند، ولی چون در همهٔ جهان دستگاه عددنویسی موضعی اعشاری عمومیت پیدا کرده بود، به تدریج ریاضی دانها به این سمت کشانده شدند که کسرهای بابلی را به کسرهای در مبنای ۱۰ تبدیل کنند.

۲ــ چینی‌ها ابتدا تعداد واحدهای یک‌طبقه را با رقمهای‌هیروگلیفی وسپس خود طبقه را با همان رقمها می‌نوشتند. این طریقه خیلی راحت بود و به دستگاه عددنویسی موضعی امروزی خیلی نزدیک است. کافی است در عددنویسی چینی نام طبقه را حذف و علامت صفر را وارد کنیم، تا همان عددنویسی امروزی‌بدست آید.

قبل از همـه سؤالی طـرح می‌کنیم: در حالی کـه کسرهای متعارفـی را بخوبی می‌شناختند چـه احتیاجی بـه کسرهای اعشاری بود؟ چـه اختلافی بین کسر متعارفی با کسر اعشاری وجود دارد، آیـا این اختلاف مربوط بـه شکـل نوشتن آنهاست و یا در محتوی این دو مفهوم وجود دارد؟

کسر متعارفی عبارتست از عـدد گویایی کـه می‌تواند بـه صورت کسر اعشاری محدود و یا متناوب نامحـدود نوشته شود. ولی مجموعهٔ همهٔ کسرهـای اعشاری را نمی‌توان به صورت کسر متعارفی نوشت. بـرای اثبات ایـن مطلب می‌توان به‌عنوان مثال از عدد $\sqrt{2}$ ، که بوسیلهٔ فیثاغورثیان پیدا شد، نام برد که با هیچ کسر گویایی قابل بیان نیست. ولی بطور کلـی هرعدد گنگ مـی‌تواند بوسیلهٔ کسر اعشاری غیر متناوب نامحدودی بیان شود. روشن است که دو مفهوم اعشاری و متعارفی، هم‌ارز نیستند، عضوهای مجموعهٔ کسرهای اعشاری نامحدود و عضوهای مجموعهٔ کسرهای متعارفی را نمی‌توان در تناظر یکبیک قـرار داد.

ولی دراینجا برای ما این‌مطلب اهمیت‌دارد که اختلاف بین دونوع نوشتن عدد را ، نه از لحاظ نظریهٔ مجموعه‌ها، بلکه بیشتر از نظر گسترش و استحکـام مفهوم خود عدد، تا آنجا که به شکل نوشتن آن مربوط است، مورد توجه قرار دهیم. کسر متعارفـی، از نظر ماهیت خـود، وسیلهٔ مناسبی است برای نشان دادن عددهای گویا (و تنها عددهای گویا)، به کمک کسرهای اعشاری هم اعداد گویا نمایش داده می‌شوند، منتهی به مفهومی کلیتر و بـه عنوان اعـداد حقیقی. و این بدان مناسبت است که در نوع نمایش اعداد بوسیلهٔ کسرهای اعشاری، اختلافـی بین اعداد گویا و گنگ وجود ندارد. چه در حالت تقسیم (وقتی کـه باقیمانده به صفر نرسد) و چه در حالت ریشه گرفتن، باید طبق قواعدی که وجود دارد، عمل را به اندازهٔ کافی ادامه دهیم و رقمهای مربوط به یکدهـم، یکصدم، یکهزارم و غیره را در تقسیم یا ریشه بدست آوریم.

به این ترتیب به سؤالی که در بالا طرح شد می‌توان اینطور جـواب داد: کسرهای اعشاری در حوزهٔ اعداد حقیقی عمل می‌کنند و بنابراین با بوجود آمدن کسرهای اعشاری، حوزهٔ اعداد حقیقی در ریاضیات مطرح می‌شود و منشاء چینی کسرهای اعشاری می‌تواند مؤید این حکم باشد.

بررسی اثر کلاسیک «ریاضیات در نه کتاب»* نشان می‌دهد که دانشمندان چینی دورهٔ **هان** (سدهٔ دوم قبل از میلاد تا سدهٔ دوم بعد از میلاد) بطور کامل با مجموعهٔ عددهای گویا کار می‌کردند. در «ریاضیات» قوانین عمل با کسرهای متعارفی، تقریباً شبیه آنچه که امروز معمول است، ذکر شده است. در همین زمان مفهوم کوچکترین مضرب مشترک و قاعدهٔ امروزی تقسیم کسرها هم وجود داشته است که تنها در قرن شانزدهم در اروپا وارد کتابهای درسی شد. اعداد منفی هم کشف شده بود.

با توجه به اینکه محاسبین چین قدیم، اعداد گویا را در اختیار داشتند، می‌توانستند هرکمیتی را یا با اندازه‌گیری مستقیم و یا با انجام اعمال محاسبه‌ای روی عددهای مفروض، بیان کنند. آنها جواب مسئله را، حتی در مواردی که بی‌معنی بود، بدست می‌آوردند. مثلاً اینکه برای انجام کاری $۲۵۸\frac{۳۷۲۶}{۱۰۰۶۳}$ آدم لازم است (مسئلهٔ ۲۲ کتاب پنجم) یا انجام حرکت یک وزنه در یک فاصله به تعداد $۵۷\frac{۱۶۲۹}{۲۶۰۳}$ مرتبه (مسئلهٔ ۸ کتاب ششم).

در مورد عددهایی مثل π و یا ریشه‌های گنگ چه می‌کردند؟ در این موارد با مقادیری کم و بیش تقریبی کار می‌کردند: مساحت دایره و حجم کره را با فرض $\pi = ۳$ بدست می‌آوردند و ریشه گرفتن را فقط در مورد جذر و کعب اعداد گویا انجام می‌دادند.

در دو متنی که از لحاظ زمانی جدیدتر است و قریب ۵۰۰ سال بعد نوشته شده، مطلب به نحو دیگری عنوان شده است. این دو متن عبارتند از حواشی مستقلی که **لیوهوئه** بر «ریاضیات در نه کتاب» نوشته است و همین بررسی اوست که به ما رسیده است، و «رسالهٔ ریاضی سون‌تسه» که قبلاً از آن یاد کرده‌ایم.

لیوهوئه عدم رضایت خود را از قاعدهٔ محدود ریشه گرفتن، که تنها مربوط به حالت مقادیر گویا بود، و مقدار تقریبی $\pi = ۳$ ابراز می‌دارد و در

*) این یکی از رساله‌های «ده کتاب ریاضی» است که در حدود دو سده پیش از میلاد تنظیم شده است.

بحث خود روابط تقریبی زیر را برای ریشه‌های گنگ می‌دهد:

$$a+\frac{۱}{۲b+۱}<\sqrt{a^{۲}+b}<a+\frac{۱}{۲b}$$

و مقدار دقیق‌تر $\pi=۳/۱۴$ را به کمک چند ضلعیهای منتظم محاطی بدست می‌آورد. او برای ریشه گرفتن توصیه می‌کند وقتی که ریشه منجر به مقدار صحیح نمی‌شود از مرتبه‌های اعشاری استفاده کنیم، او این علامتها را «وی» (یعنی کوچکترین) می‌نامد، ولی متأسفانه مثالی نمی‌آورد.

می‌توان از بحثی که لیوهوئه دربارهٔ محاسبهٔ عدد π انجام داده است متوجه شد که او چگونه کسرهای اعشاری را نمایش داده است.

در اینجا، او پاره خطها را به کمک تقسیم‌بندی اعشاری بیان می‌کند، واحدهایی که برای طول، چی، بکار می‌برد عبارتند از: تسون، فن، لی، هااو، میااو، هو، و اگر عددی در حد این واحد قابل بیان نبود، باقیمانده را با کسر متعارفی نشان می‌داد، مثلاً:

۹ تسون ۷ فن ۷ لی ۸ هااو ۵ میااو ۸ هو $\frac{۹}{۱۰}$ هو. و این کسری است شبیه دستگاه متری که در آن هر قسمت نام خاصی دارد و ضمناً در هر مورد نوع اندازه‌گیری ذکر می‌شد: طول یا وزن یا گنجایش، بسته به نوع انتخاب واحد صحیح، اسامی بعدی متعاقباً قسمتهای یکدهم، یکصدم، یکهزارم و غیره از این واحد را نشان می‌دهند. به این ترتیب واحد یکدهم در یک حالت ممکن است برای حالت دیگر واحد صحیح یا واحدیکصدم باشد و ممیز می‌تواند جای خود را تغییر دهد. مثلاً اگر در عبارت لیوهوئه واحد اصلی را **چی** بگیریم، کسر مساوی ۰/۹۷۷۸۵۸۹ می‌شود و اگر **تسون** را واحد اصلی بگیریم مساوی ۹/۷۷۸۵۸۹.

از نوع چنین کسرهایی در رسالهٔ سون‌تسه فراوان است. ولی در آنجا کسرهای بغرنجی از نوع آنچه که در بالا از «ریاضیات در نه کتاب» آوردیم، دیده نمی‌شود. در رسالهٔ سون‌تسه مفروضات عددی در مسائل ساده انتخاب شده‌اند و چنانند که منجر به جوابهای کوچک و ساده می‌شوند. مقادیر این

دستگاه «شبه‌متری» به کمک دستگاه وسیعی از واحدها بیان می‌شوند، به نحوی که کسرهای متعارفی در حالت تقسیم محدود بـه آنها تبدیل می‌شونـد. مثالی می‌آوریم:

مسئله‌ای وجود دارد که در هردو رساله: «ریاضیات در نه‌کتاب» و «رسالهٔ ریاضی سون‌تسه‌زی» آمده است. این مسئله مربـوط بـه مبادلهٔ غلات است: «۷ دوی و ۹ شه‌نو ارزن داریم. آنها را با چقدر گندم می‌توانیم عـوض کنیم؟». حل مسئله ساده است: در جدول خاصی (کـه «ریاضیات...» کتاب دوم بـا آن شروع می‌شود) سه رابطه بین انواع مختلف غلات از لحـاظ تعادل قیمت داده شده است (این رابطه در مورد دو نوع غلهٔ مسئلهٔ مـا مساوی ۵۰ و ۲۱ است). مقدار مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\text{۷دوی ۹ شه‌نو}}{\text{۵۰}} \times \text{۲۱}$$

از محاسبه‌ها معلوم می‌شود که:

۱ هو = ۱۰ دوی

۱ دوی = ۱۰ شه‌نو

واحد اصلی در چین دوی بوده است که بـه تقریب مساوی ۱۰/۳۵ لیتر است.

به سادگی معلوم می‌شود که با توجه به این واحدها به دست می‌آیـد «۳ دوی ۳ شه‌نو و $\frac{۹}{۵۰}$ شه‌نو»، که در «ریاضیات در نه‌کتاب» هـم بـه همین ترتیب داده شده است. کسرهای لیوهوئه با بیانی کاملاً مشابه، منتهی خیلی کـوتاهتر است. او تنها از سه واحدی که در عمل بکار می‌روند، استفاده کرده است. البته لیوهوئه از تقسیمات خیلی کوچکتر هم استفاده کـرده است؛ ایـن تقسیمات در محاسبه‌های اقتصادی مورد مصرف نداشتند ولی به این علت درست شده بودنـد که بتوان مقادیر کمتر از واحد را در دستگاه اعشاری بیان کرد.

به‌این ترتیب بنظر می‌رسد که لیوهوئه از کسرهائی با منطق دستگاه‌متری استفاده می‌کرد، در حالی که در «ریاضیات...» هنوز چنین کسرهایـی وارد نشده

بود. در «رسالهٔ ریاضیات سون‌تسه‌زی» به کار برد منطقی‌تری از فکر کسرهای اعشاری برخورد می‌کنیم.

بنظر می‌رسد کــه سون‌تسه‌زی بـا اقتباس مسئله‌ای از «ریـاضیات در نه کتاب» تلاش می‌کند بخصوص ثابت کند که مقدار مجهول را می‌تـوان در اینجا به صورت کسر کامل اعشاری نشان داد: «۳ دوی ۳ شه‌نو ۱ گه ۸ شائو» بـرای اینکه کسر متعارفی را بکار نبرد از واحدهــای کوچکتر از شه‌نو ، کـه خـودش یکدهم واحد گنجایش است، استفاده می‌کند.

این مسئله می‌تواند به عنوان مسئلهٔ خـاصی کـه سون تسه‌زی را به کسرهای اعشاری (با نظم دستگاه متری) هدایت می‌کند، مورد بررسی قـرار گیرد. برای این منظور، او برخلاف لیوهوئـه بــه جای استفاده از روش کلــی ریشه گرفتن استفاده نمی‌کند، بلکه روش کلی تقسیم را بکار می‌بـرد، یعنی مفهـوم طبقه‌های کسرهای اعشاری را به همان صورتی که امروز در مدارس انجام می‌دهند، روشن می‌کند.

برای این منظور به دنبال این مسئله، سه مسئلهٔ دیگــر مورد مطالعه قـرار می‌گیرد. این سه مسئله هم از «ریاضیات در نه کتاب» اقتباس شده‌اند که در آنجا هم با همین ردیف آمده‌اند. بـا این مسئله‌هـا حالتهای مختلف تقسیم عددهـای صحیح معرفی شده است، بنحوی که جواب در یک مورد عددی صحیح، در مورد دوم‌کسرمرکب تحویل‌ناپذیر ودر موردسوم کسرمرکب تحویل‌پذیر بدست می‌آید.

حالـت چهارم، حالت تقسیم با باقیمانده، کـه کسر اعشاری را معرفـی می‌کند، از لحاظ منطقی منجر به موضوع جدیدی در ریاضیات می‌شود.

کسرهای اعشاری در مسئله‌های سون‌تسه‌زی، تنها برای بیان مقادیر مجهول بکار نمی‌رود (یعنی مواردی که ضمن محاسبه بدست می‌آید، آنطور که در مسئلهٔ مشخص نشان داده شد)، بلکه در شرایط مفـروض مسئله‌ها هم وارد می‌شود. بـه کمک آنها حتی ضـریب تبدیل واحـد حجم به واحد گنجایش هم توضیح داده می‌شود که اغلب در مسئله‌ها عمل تقسیم برآن انجام می‌گیرد. ایـن ضریب برابر است با ۱ چـی ۶ تسون ۲ فن (این اندازه‌هــا در متنهای قدیمی چینی وجـود ندارد: این عدد عبارتست از حجم ۱ دوی از مایعــی کـه ظرف مکعب مستطیل‌شکل به قاعدهٔ ۱ چی مربع و ارتفاع ۱/۶۲ چی را پر کرده باشد).

در «ریاضیات در نه کتاب» که در آنجا تنها سه واحد طول مورد استفاده قرار گرفته است:

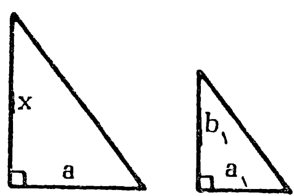
۱ چژان = ۱۰ چی
۱ چی = ۱۰ تسون

این ضریب با کسر متعارفی نوشته شده است: ۱ چی ۶ تسون و $\frac{۱}{۵}$ تسون.

نوع محاسبه‌ای که از مسئله‌های سون‌تسه‌زی استنباط می‌شود نشان می‌دهد که می‌توانستند روی این کسرهای اعشاری اعمال مربوطه را انجام دهند. عملهای بغرنجی مثل ضرب و تقسیم را با منظور کردن قانون ویرگول انجام می‌دادند، که در اساس همان روشی است که ما امروز هم بکار می‌بریم. اختلاف تنها مربوط به شکل خاصی است که این کسرهای با منطق دستگاه متری را مشخص می‌کند. با یک مثال مطلب را روشن می‌کنیم.

مسئلهٔ ۲۵ از کتاب آخر سون‌تسه‌زی را، که برای هدف ما مناسب است، مورد بررسی قرار می‌دهیم (سون‌تسه‌زی سه کتاب داشته است، کتاب اول، کتاب متوسط، کتاب آخر). «دیرکی با اندازهٔ نامعلوم وجود دارد. سایهٔ آنرا اندازه گرفته‌ایم ۱ چژان ۵ چی بدست آمده است. جدا از این دیرک، ستونی قرار دارد که طول آن ۱ چی ۵ تسون است. سایهٔ این ستون ۵ تسون است. طول دیرک چقدر است؟

جواب: ۴ چژان ۵ چی».



شکل ۱۵

مقدار مجهول عبارتست از جزء چهارم تناسبی که با سه جزء معلوم آن ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه دو مثلث متشابه قائم‌الزاویه را تشکیل می‌دهند:

$$x=\frac{ab_۱}{a_۱}$$

در اینجا راه حل مسئله، که خیلی هم ساده است، برای ما جالب نیست، آنچه مورد توجه ما است روشهای محاسبه است. اگر واحد صحیح را چژان قبول کنیم، حل چینی مسئله، با نوع نوشتن امروزی، چنین است:

$$x=\frac{۱/۵\times ۰/۱۵}{۰/۰۵}=\frac{۰/۲۲۵}{۰/۰۵}=\frac{۲۲/۵}{۵}=۴/۵$$

در حقیقت در نوشتهٔ چینی چنین گفته شده است:

«برقرار می‌کنم سایهٔ دیرک را به ۱ چژان ۵ چی. این مقدار را در طول ستون یعنی در ۱ چی ۵ تسون ضرب می‌کنم. به طبقهٔ سمت چپ حرکت می‌دهم، بدست می‌آید ۲۲ چژان ۵ چی. این مقدار را برسایهٔ ستون یعنی بر ۵ تسون تقسیم می‌کنم و مجهول را بدست می‌آورم».

قبل از آنکه به روشن کردن قانونی بپردازیم که با اصطلاحاتی مثل «برقرار می‌کنم» و«حرکت می‌دهم» بیان شده است، با وسیله‌ای آشنا شویم که در چین باستان برای محاسبه مورد استفاده قرار می‌گرفت. این وسیله یک نوع تخته یا چرتکهٔ محاسبه‌ای بود که در پیشرفت روشهای عمومی محاسبه‌ای در ریاضیات چین باستان اثر فوق‌العاده‌ای داشته است. ما دقیقاً نمی‌دانیم که این وسیله چگونه بوده است، ولی عددها روی آن به کمک چوب خطهای محاسبه‌ای در دستگاه به مبنای پنج نشان داده می‌شد. تا عدد ۵ را بطور ساده با کنار هم گذاشتن چوب خطها نشان می‌دادند (مثلاً ۴ به صورت |||| نشان داده می‌شد)، ولی برای بیان عددهای از ۶ تا ۹، چوب خطی عمود برسایرین و در بالای آنها می‌گذاشتند و اندازهٔ آنرا ۵ به حساب می‌آوردند (مثلاً، ۸ به صورت $\overline{|||}$ نشان داده می‌شد). روی تخته چوب خطها را به صورت افقی و قائم و با استفاده از روش موضعی بودن رقمها منظم می‌کردند، جای خالی بین رقمها معرف این بود که ردیفی وجود ندارد. صفر را روی تخته لازم نداشتند، به این ترتیب لااقل در چهار قرن قبل از میلاد، چینیها از همان دستگاه اعشاری موضعی، که ما امروز بکار می‌بریم، استفاده می‌کرده‌اند، یعنی حتی روش تعیین عددهای صحیح و

کسری را تقریباً بدون تفاوت با روش امروزی انجام می‌دادند. در مورد حل مسئله یک برنامهٔ کلی برای یک رشته عملهای لازم روی تختهٔ محاسبه طرح می‌کردند و این شبیه برنامه‌ای است که امروز برای حل مسئله‌ها بـه ماشینهای محاسبهٔ الکترونی می‌دهند.

طرح عملهایی را که روی تختهٔ محاسبه برای حل مسئله، می‌دادند در اینجا روشن‌می‌کنیم. عمل را از ردیفهای بزرگتر به‌طرف ردیفهای کوچکتر انجام‌می‌دادند:

۱ چی = ۱ چی. ۱ چژان (۱

۵ تسون = ۱ چی. ۵ چی (۲

۵ تسون = ۵ تسون. ۱ چژان (۳

۵ فن ۲ تسون = ۲۵ دهم تسون = ۵ تسون. ۵ چی (۴

در اینجا قسمتهای یکدهم تسون وارد شده است (فن)، ولی قاعدهٔ آن شرح داده نشده است (قاعده‌های چینی بدون توضیح بیان می‌شوند، و اغلب به اختصار کامل برگزار می‌شوند).

به این ترتیب می‌بینیم کـه ریاضی‌دانهای چینی به قاعدهٔ ضرب ردیفهای اعشاری آشنا بوده‌اند: چژان را در چی ضرب می‌کردند و چی بدست می‌آوردند و غیره:

		تسون	چی	چژان	
مضروب			۵	۱	
مضروب‌فیه		۵	۱		
حاصل ضرب های جزئی	۵	۵ ۵ ۲	۱		
حاصل‌ضرب	۵	۲	۲		
خارج‌قسمت			۵	۴	
مقسوم			۵	۲	۲
مقسوم علیه				۵	

نتیجهٔ ضرب (که مساوی ۲ چی ۲ تسون ۵ فن است) به سمت چپ برده شده است، مثل اینکه آنرا در ۱۰۰ ضرب کرده باشند. واضح است که این عمل به‌مناسبت تقسیمی که بعد باید انجام داد، لازم است: تقسیم ۲۲چژان ۵ چی بر ۵ تسون (درحقیقت باید گفت بر ۵ چژان، زیرا مخرج هم در ۱۰۰ ضرب شده است؛ در تخته حساب حرکت مقسوم‌علیه انجام شده است، ولی در ذکر قاعده دربارهٔ تبدیل مقسوم علیه صحبتی به میان نیامده است). خارج قسمت مساوی ۴ چژان ۵ چی می‌شود.

ولی کسرهای با منطق متری را هنوز نمی‌توان کسرهای اعشاری امروزی دانست، آنها تنها شکل ابتدائی کسرهای اعشاری به حساب می‌آیند. برای اینکه مفهوم کسر اعشاری بطور کاملاً انتزاعی آن بدست آید، باید از پوشش منطق متری بیرون آید یعنی از پوسته و از حوزهٔ مقادیری که خود به خود فکر تقسیم منظم واحدها را تلقین می‌کند، بیرون بیاید و بتواند بطور کلی تا هرجا که لازم است ادامه پیدا کند. رسیدن به چنین ساختمان انتزاعی‌کار مشکلی بود، زیرا برای ریاضی‌دانهای باستانی همیشه مسئله‌ها به صورت مشخص و عملی آن مطرح بوده است.

در مسئله‌های باستانی معمولاً سخن از اندازهٔ سطح کف اطاقها، حجم آب‌بندها و آب‌روها و دیوار قلعه‌ها، گنجایش انبارهای غله، وزن ابریشم یا پنبهٔ خام، اندازهٔ پارچه‌های ابریشمی یا کتانی است. بنابراین در مسئله‌هایی که از زندگی روزانه گرفته شده است، اغلب با مقدارهای با منطق متری یا با عددهایی که برای واحدهای مختلف آن نامی وجود داشته باشد، سروکار دارند.

ولی ریاضیات مایهٔ اصلی این مسئله‌های مشخص را جدا می‌کند و روشهایی برای حل کلی یک دسته از مسئله‌های معین بوجود می‌آورد و کلیترین نوع مسئله‌ها را به حل ساده‌ترین آنها می‌رساند.

به این ترتیب محتوی عملی مسئله‌ها تسلیم طرحهای کلی می‌شود و با کنار رفتن‌آن، مسئله‌های خالص علمی به وجود می‌آید.

در حقیقت حالا دیگر همهٔ امکانات برای تنظیم مسئله‌ها به صورت کلی و بدون توجه به جنبهٔ عملی آنها، بوجود آمده بود. در «ریاضیات در نه‌کتاب» به مسئله‌هایی کاملاً کلی و حل جبری آنها برخورد می‌کنیم: در کتاب هفتم به نام

«زیادی ـ کاستی» و در کتاب هشتم به نام «قانون فان‌ـچن». ولی بطـور کلی برای مسئله‌های چینی این خصوصیت اساسی وجـود دارد کـه شکل عملـی با محتوی انتزاعی به هم‌آمیخته است، شبیه آنچه که قبلاً در مورد قسمتهای کسری برای آدم دیدیم.

سون‌تسه‌زی هم، وقتی که درک خودش را از کسرهای اعشاری بـا مفهوم کلی پیشنهاد می‌کند، درست به همین ترتیب عمل مـی‌کند. او مقداری را انتخاب می‌کند که از قبل معلوم است قسمتهای کوچکتری ندارد. ایـن مقدار غیر قابـل تقسیم، مثلاً آدم است که قسمتی از آن بدون معنا می‌شود. کـاملاً روشن است که قسمتهای اعشاری چنین عددی، کسرهای اعشاری امروزی را معرفـی می‌کند، اگر چه خود عدد ظاهراً انتزاعی نیست و به نامی وابسته است.

این مسئلهٔ دوم از کتاب آخر رسالهٔ سون‌تسه‌زی است:

«۱۵۰۰۰۰۰۰ دهقان وجـود دارد، [کـه از آنها] ۴۰۰۰۰۰ سربـاز انتخاب شده است. می‌خواهیم بدانیم از هرچند دهقان یک سرباز انتخاب شده است؟

جواب: ۳۷ دهقان و ۵ فن».

در اینجا آموزش کسر اعشاری مطرح نیست، ولـی کسر اعشاری وجـود دارد: «۳۷ عدد صحیح و ۵ دهم»، منتهی ۵ دهم دهقان نمی‌تواند وجـود داشته باشد. در اینجا ریاضـی‌دان چینی برای قسمتهای اعشاری عـدد از کلمهٔ «فـن» استفاده کرده است که به معنی $\frac{1}{10}$ تسون است. بکـار بردن نامهـای مشخـص برای قسمتهای اعشاری انتزاعی کاملاً معمول بوده است و بعدها هـم از ایـن عادت پیروی شده است. در چین قدیم ایـن قسمتهای اعشاری را از روی ارزش سکـه‌ها نام مـی‌گذاشتند. سون‌تسه‌زی قسمتهای اعشاری «بو» را بکـار می‌برده است که بطورکلی وجود نداشته است: ۱ بو از ۶ چی تشکیل شده بود. در این حالـت «بو» مثل آدم، مقداری غیر قابل تقسیم بود.

این مرحله که قسمتهای اعشاری هر عدد با نام یک مقدار مشخص را بکار می‌بردند، عبوری است از مفهوم کسر بـا منطق متری به مفهـوم کسر اعشاری. می‌بینیم چگونه به تدریج وجود هرسه مقیاس با منطق متری برای طـول، وزن و

حجم وغیره لازم می‌شود، زیرا در ابتدا یکی از این مقیاسها کافی بود.*

وقتی که «فن»، قسمت اعشاری تسون، معنای اولیهٔ خود را از دست داد، معنای جدیدی برای قسمت اعشاری بطور کلی کسب کرد؛ این معنا تنها برای بقیهٔ مقادیر با منطق متری نبود، بلکه برای قسمت اعشاری یک عدد بطور کلی بکار می‌رفت.

این درک جدید از مفهوم عدد و توسعهٔ آن به صورت دستگاه اعشاری و پیدا شدن ردیفهای کوچکتر از واحد در خود ریاضیات بوجود آمد و به همین علت ابتدا در حوزهٔ محدودی عملی شد.

دو مسئله را از رسالهٔ سون‌تسه‌زی مقایسه می‌کنیم که به خوبی می‌تواند احتیاطی را که در تبدیل به وضع جدید وجود داشته است روشن کند.

یکی از آنها، مسئلهٔ بیست و یکم از کتاب متوسط رساله است:

«کف اطاقی به شکل منحنی است که طول آن ۶۳۹ بو وقطر آن ۳۸۰ بو است. سطح کف اطاق چقدر است؟»

باید مساحت قطاع را طبق دستور چینی بدست آوریم:

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{C}{۲} \cdot \frac{D}{۲}$$

که در آن C طول قوس و D قطر دایرهٔ قطاع است. برای نصف کردن طول قوس یعنی ۶۳۹ بو، عدد اعشاری ۳۱۹/۵ بو بدست می‌آید. سون‌تسه‌زی این مقدار را اینطور بدست می‌آورد:

«طول قوس را نصف می‌کنیم ۳۱۹ بو ۵ فن بدست می‌آید.»

ولی در همین کتاب از رساله، مسئلهٔ شانزدهم هم وجود دارد.

«طنابی به طول ۵۷۹۴ بو داریم. اگر با آن مربعی بسازیم، طول ضلع مربع چقدر است؟

---

*) در این مورد بجاست از تلاشی که در سدهٔ دهم برای عوض کردن یک جدول «بد» در مورد وزنها و تبدیل آن به دستگاه اعشاری انجام گرفته است نام ببریم. ضمناً نام واحدها از اندازه‌های طول اقتباس شده بود همانطورکه دیدیم در مثال لیوهوئه به صورت اعشاری به هم مربوط بودند.

جواب: ۱۴۴۸ بو ۳ چی».

جواب این مسئله را می‌شد به صورت کسر اعشاری ۱۴۴۸/۵ بو داد، ولی سون‌تسه‌زی این کار را نمی‌کند. از این دو مسئله‌ای که ذکر کردیم معلوم می‌شود که سون‌تسه‌زی تحت فشار سنت بوده است. در عملی که سون تسه‌زی به عنوان یک عمل بینابینی انجام می‌دهد، به خودش حق می‌دهد از یک بدعت در زمینهٔ محاسبه استفاده کند. این کار برای او خطری ندارد، زیرا در مسئلهٔ اول و برای محاسبهٔ مساحت قطاع باید بالاخره ۳۱۹/۵ را در ۱۹۰ ضرب کند و در نتیجه کسر اعشاری باقی نمی‌ماند. ولی در مورد مسئلهٔ دوم وضع بکلی فرق می‌کند. کارمند ادارهٔ ارضی کتاب را مطالعه می‌کند و ممکن است از لحاظ واحد اختراعی جدید به زحمت بیفتد. و می بینیم که سون‌تسه‌زی لازم می بیند که در این مسئله از قانون خودش بگذرد و همان اندازه‌های قدیمی و عادی را برای طول در نظر بگیرد. البته حل مسئله پیچیده می‌شود، ولی آیا سون‌تسه‌زی هم می‌خواهد همین را نشان بدهد؟ به جای یک عمل تقسیم ناچار شده است دو عمل دیگر هم انجام دهد:

«طول طناب را ۵۷۹۴ بو برقرار می‌کنم، آنرا بر ۴ تقسیم می‌کنم، ۱۴۴۸ بو بدست می‌آورم و ۲ بو هم باقی می‌ماند. باقیمانده را در ۶ ضرب می‌کنم ۱چژان و ۲ چی بدست می‌آورم. آنرا بر ۴ تقسیم می‌کنم ۳ چی بدست می آورم».

همین شباهت تاریخی را در ریاضیات بابلی هم می‌توانیم پیدا کنیم. در آنجا دستگاه شصتگانی محاسبه را کشف کرده بودند که براساس موضعی بودن رقمها بنا شده بود و تنها در محاسبه‌ها بکار می‌رفت؛ ولی مقدارهای مفروض و یا نتیجه‌هایی را که بعد از محاسبه بدست می‌آمد در دستگاه شصتگانی و یا دستگاه اعشاری غیر موضعی (که در متنهای اقتصادی بکار می‌رفت و در عمل رواج فراوان داشت) بیان می‌کردند.

خاصیت اصلی کسر اعشاری، یعنی اینکه انتقال ممیز به راست (به چپ) با ضرب عدد در توانی از ده (تقسیم عدد بر توانی از ده) معادل است، به خوبی در چین باستان شناخته شده بود. در زبان چینی دو اصطلاح وجود داشته است: «شان‌شی‌چژه» به معنای بزرگ کردن یک عدد یا ضرب آن در ۱۰، و

«توی» (عقب کشیدن) به معنای حرکت از ردیف مورد نظر به طرف چپ، این عملها ضمن حل مسئله‌های ۲۱ و ۲۲ کتاب سوم از رسالهٔ سون‌تسه‌زی وجود دارد. یکی از این مسئله‌ها را در اینجا می‌آوریم:

«۱ پی کتان وجود دارد که ۱۸۰۰۰ تسیان می‌ارزد. قیمت یک چژان، یک چی، یک تسون از کتان بطور جداگانه چقدر است؟*

جواب: چژان ــ ۴۵۰۰ تسیان،

چی ــ ۴۵۰ تسیان،

تسون ــ ۴۵ تسیان.

روش حل: ۱۸۰۰۰ تسیان را برقرار می‌کنم، آنرا بر ۴ تقسیم می‌کنم، ارزش یک چژان بدست می‌آید. به طرف راست عقب می‌کشم، یک‌بار دیگر به طرف راست عقب می‌کشم، ارزش چی و تسون را بدست می‌آورم».

در این مسئله اصطلاح «توی» بکار رفته است. در مسئلهٔ دیگر (۲۲) که عدد ۱۸۰۰۰۰۰ در ۱۰۰ ضرب می‌شود، ردیف را به سمت چپ حرکت می‌دهد، یعنی باصطلاح امروزی علامت ممیز را دو رقم به سمت راست می‌برد. در مسئلهٔ ۹ از کتاب سوم رسالهٔ سون‌تسه‌زی، ضرب در ۴۰ با دو عمل انجام می‌شود: ضرب در ۱۰ و در ۴.

به این ترتیب، چینی‌ها به خاطر تکنیک خوب و پیشرفته‌ای که در محاسبه داشتند، در حالی که لگاریتم و مثلثات را نمی‌شناختند، به برتری کسرهای اعشاری پی برده بودند و نظر من این است که مفهوم کسر اعشاری در قرن سوم میلادی ودرچین کشف شده است. درست است که بعدها هم خصوصیت متری بودن کسرهای اعشاری باقی ماند، ولی این خصوصیت کاملاً به سمت انتزاع متمایل بود.

به شهادت اوراق تاریخ **تسه‌زوچون ـ چژی** ریاضی‌دان سدهٔ پنجم چین هم از این کسرها استفاده می‌کرده است. نام تسه‌زو چون ـ چژی ازین جهت در تاریخ آمده است که عدد π را تا شش رقم صحیح اعشار محاسبه کرده بود.

جبردانهای قرن سیزدهم وچهاردهم میلادی: **تسین تسه‌زیو-شا ای، چژوشی-**

---

*) ۱ پی = ۴ چژان = ۴۰ چی = ۴۰۰ تسون.

تسه‌زه، لی‌ئه و یان‌هو ئه‌هم کسرهای اعشاری را بکار برده‌اند. اصطلاح امروزی چینی «سیائوشو» (عددهای‌کوچک) برای کسرهای اعشاری مربوط به چژوشی‌ــ تسه‌زه است. او مقیاس واحد طول را تا 10^{-16} چی داده بود و نامهایی که برای این مقیاسها گذاشته بود تا مدتها و تا زمانی که ریاضیات جدید از غرب به چین نفوذ کرد حفظ شده بود. یان هوئه در یکی از مسئله‌های خود ابتدا کسر متعارفی را به کسر اعشاری تبدیل می‌کند و بعد عمل (ضرب) را انجام می‌دهد. در دورهٔ کانگ‌ـ‌هی (۱۶۶۲-۱۷۲۲) تعیین واحدهای اندازه‌گیری قدیمی را، که گویا مورد استفادهٔ هوانددی امپراطور افسانه‌ای سدهٔ بیست و هفتم پیش از میلاد بوده است مورد تجدید نظر و دقت قرار دادند. جدولهای اندازه گیری را که به این ترتیب درست شد، در «فرهنگ ریاضی» ضبط کردند. در این جدولها اندازه‌های کسری خیلی دقیق داده شده است، اندازهٔ طول تا 10^{-31} چی، اندازهٔ حجم تا 10^{-14} شن، اندازهٔ وزن تا 10^{-16} لانو. رابطهٔ بین واحدها تقریباً درهمه جا به صورت اعشاری است و رابطه‌های از نوع (۶ چی = ۱ بو) به رابطهٔ ساده‌تر (۵ چی = ۱ بو) تغییر پیدا کرده است.

ما با تفصیل لازم تکامل کسرهای اعشاری را از صورت جنینی آن، کسرهای با منطق‌متری به کسرهای اعشاری انتزاعی مورد مطالعه قرار دادیم. منتهی خود کسرهای با منطق متری چگونه بوجود آمدند؟ و چه ضرورتی باعث پیدایش آنها شد؟

روشن است که بدون در نظرگرفتن اثر تختهٔ محاسبه (که به کمک آن محاسبه‌های اعشاری انجام می‌گرفت) نمی‌توان به این سؤال جواب داد. برای این بررسی به تاریخ منطق متری نظری می‌اندازیم.

واحدهای مختلف اندازه گیری در رشته‌های مختلف فعالیت آدمی، همزمان و بدون ارتباط با یکدیگر بوجود آمده است. به کمک پی و دوآن (قطعه) پارچه را اندازه می‌گرفتند، به کمک بو (قدم) ضلعهای قطعه زمینها را بدست می‌آوردند، به کمک لی (ورست) فاصلهٔ تا نقاط پر جمعیت را بیان می‌کردند. چی که حالا مساوی $\frac{1}{3}$ متر است و در طول تاریخ از ۰/۱۹ متر تا ۰/۳۴ متر تغییر کرده است، برای اشیایی که در منزل و یا سایر جاها مورد مصرف

داشته‌اند، بکار می‌رفته است.

وقتی که هر یک از این واحدها در جای خود مستقر شدند، لازم شد که مقایسهٔ بین آنها بعمل بیاید. البته رابطهٔ بین این واحدها بکلی غیر اعشاری بود. ولی وقتی که برای دانشمندان ضمن محاسبه، عددهای خیلی کوچک و خیلی بزرگ بوجود می‌آمد، وضع دیگری بود. در این مورد می‌شد از یک مقیاس منظم استفاده کرد و این مقیاس بطور طبیعی در دستگاه شمار اعشاری وجود دارد که در آن می‌توان بطور دلخواه و تا هر اندازه که لازم باشد از دو طرف عدد جلو رفت.

تاریخ چین حتی از نخستین قانون گذاری دربارهٔ اندازه‌ها خبر می‌دهد، این قانون‌گذاری در قرن سوم قبل از میلاد و بوسیلهٔ امپراطور **تسین‌شی‌هو‌اندی** انجام گرفت. این امپراطور چین را به صورت یک دولت واحد درآورد و اصلاحاتی انجام داد؛ خط نوشتنی را یکنواخت کرد، برای عبور ارابه‌ها جاده کشید و غیره. تا این زمان در مورد مقیاسها آشفتگی زیادی بود مثلا:

۸ چی = ۱ سیون؛ ۲ سیون = ۱ چژان؛ و همچنین ۸ چی = ۱ ژن، گاهی هم ممکن بوده ۴ چی یا ۷ چی تشکیل یک ژن را بدهند.

بخصوص مطالب زیادی دربارهٔ منطق متری می‌توان در «رسالهٔ ریاضی سون‌تسه‌زی» پیدا کرد.

اگر اولین صفحهٔ این رساله را باز کنیم، به جدول اندازه‌ها و وزنها برخورد می‌کنیم.

با این جدولها بیشتر آشنا می‌شویم. قبل از همه جدول سوم اندازهٔ حجم‌ها برای ما مهم است که در مسئلهٔ مربوط به مبادلهٔ غلات به آن برخورد می‌کنیم. این جدول شامل اجزایی کوچکتر از آنچه که در این مسئله نسبت به واحد **دوی** می‌بینیم، می‌باشد:

«برای تعیین حجم با شروع از **سو**:

۱ گه = ۱۰ شااو	۱ گوی = ۶ سو
۱ شه‌نو = ۱۰ گه	۱ تسو = ۱۰ گوی
۱ دوی = ۱۰ شه‌نو	۱ چاا‌و = ۱۰ تسو
۱ هو = ۱۰ دوی	۱ شاا‌و = ۱۰ چاا‌و»

این جدول از این جهت شایان توجه است که در همهٔ تساویها، بجز نخستین آنها، با شمار اعشاری ساخته شده است. به همین مناسبت، همانطور که قبلاً هم دیدیم، می‌توان از آنها برای نشان دادن عددها به صورت کسرهای با منطق اعشاری به سهولت استفاده کرد. به عنوان مثال اگر **دوی** را واحد بگیریم، به کمک جدول می‌توان تا ۶ رقم اعشاری را محاسبه کرد.

متذکر می‌شویم که اگر برعکس مثلاً **گوی** را به عنوان واحد اختیار کنیم، می‌توان دستگاهی با ردیفهای مشخص برای بیان عددهای بزرگ در دست داشت به نحوی که برای هر ردیف نامی وجود داشته باشد. **سون‌تسه‌زی** دو نمونه از چنین دستگاهی را ساخته است. در دستگاه اول هر ردیف جدید که از 10^8 شروع می‌شود، با نامهای خاصی داده شده است: ای، چژائو، تسه‌زی و غیره؛ در دستگاه دوم (که برای عددهای بزرگ است) اسمهای مشابهی برای هر یک از طبقه‌های جدید، یعنی 10^8، 10^{12}، 10^{16} و... ذکر شده است.

جدول دیگر شامل اندازهٔ وزنهاست که البته اجزاء آن اهمیت اجزاء جدول حجمها را ندارد. اندازه‌هایی که مربوط به وزن است در چین اعشاری نبوده است. علاوه برآنکه این جدول اعشاری نیست، یکنواخت هم نیست:

«برای وزن کردن با شروع از شو:

۱ تسه‌زین = ۱۶ لانو	۱ له‌ی = ۱۰ شو
۱ تسه زیون = ۳۰ تسه زین	۱ چژو = ۱۰ له‌ی
۱ دوانیو = ۴ تسه زیون	۱ لانو = ۲۴ چژو»

همانطور که دیده می‌شود همهٔ رابطه‌های بین اندازه‌ها در این جدول، بجز دوتای اول آن، به صورتهای متفاوت است؛ به روشنی معلوم است که دو رابطهٔ اول هم بعد از تنظیم جدول به آن اضافه شده است. این مطلب به ما در این نتیجه‌گیری کمک می‌کند که جدولهای سون‌تسه‌زی نه یک جمع‌آوری سادهٔ واحدهای موجود، بلکه نتیجهٔ تنظیم و اصلاح آنها بوده است. ابتدا یک واحد اساسی تعریف می‌شود و سپس رابطهٔ بین واحدهای مختلف حتی‌الامکان به صورت اعشاری داده می‌شود.

جدولها بطور وضوح دربارهٔ تاریخ منطق متری سخن می‌گویند. برای

تشکیل اندازه‌های کوچکتر و یا بزرگتر، واحدهای اصلی را به طریقه‌های مختلف می‌شکستند و یا با هم یکی می‌کردند، و فقط بعدها این عمل را به صورت مقیاس اعشاری درآوردند. این مطلب را بیش از همه می‌توان از جدول اندازهٔ طول فهمید که سون‌تسه‌زی رسالهٔ خود را با آن شروع می‌کند:

«برای اندازه‌گیری طول از هو شروع می‌کنم. اگر بخواهی دربارهٔ هو بدانی، آن عبارتست از نخی‌که کرم ابریشم تف می‌کند.

۱ ینیو = ۱۰ چژان	۱ سی = ۱۰ هو
۱ دوانیو = ۵۰ چی	۱ هااو = ۱۰ سی
۱ پی = ۴۰ چی	۱ لی = ۱۰ هااو
	۱ فن = ۱۰ الی
۱ بو = ۶ چی	۱ تسون = ۱۰ فن
۱ مو = ۲۴۰ بو	۱ چی = ۱۰ تسون
۱ لی = ۳۰۰ بو	۱ چژان = ۱۰ چی»

اندازهٔ طول هو به اندازهٔ قطر تار ابریشم تعیین می‌شود. یکی از اندازه‌هایی که در اینجا نام برده شده است مربوط به مساحت است و این مو است، بنابراین تساوی مربوطه را باید اینطور گفت: ۲۴۰ بوی مربع مساویست با ۱ مو، و آنطور که از مسئلهٔ اول «ریاضیات در نه کتاب» نتیجه می‌شود، این مساحت مستطیلی است به ضلعهای ۱۵ و ۱۶ بو (قدم). **تسین‌شی‌هواندی** ۵ رقم اعشار برای چی داده بود.

می‌بینیم که فن محاسبه در منطق متری اثر گذاشت و این به نوبهٔ خود مایهٔ اصلی برای کسرهای اعشاری شد. تختهٔ محاسبه همراه با روش موضعی که در آن بکار می‌رفت به پیدایش کسرهای اعشاری کمک کرد. روی این تخته می‌بایست به سادگی عملهای تقسیم و ریشه گرفتن، بدون توجه به مرزی که ستون عددهای صحیح را مشخص می‌کند، انجام شود. هرستون خالی که در سمت راست ستون واحد قرار گرفته باشد، می‌تواند برای بدست آوردن رقمهای اعشار بکار رود، که به زبان امروزی به معنای این است که در سمت راست ممیز صفر قرار دهیم.

ولی این تختهٔ محاسبه هم به نوبهٔ خود محدودیتی بوجود آورده بود.

بعد از انجام عمل روی تخته به محض اینکه نتیجه را از روی آن جدا می‌کردند، وضع موضعی بودن خود را از دست می‌داد. برای نوشتن، چینی‌ها از اصل ترکیب ضربی استفاده می‌کردند، یعنی از دستگاه اعشاری که رقمهای آن نامهای موضعی داشت، شبیه آنچه که در دستگاه عددشماری شفاهی امروزی داریم. در این عددنویسی صفر وجود ندارد. همانطور که روی تخته هم وجود ندارد. نبودن علامت صفر (به نحوی که صفر را به عنوان یک رقم مثل سایر رقمها وارد در عدد کند) مانع بوجودآمدن شکل نهایی کسرهای اعشاری شد. به همین علت است که در کسر اعشاری چینی علامت ممیز وجود ندارد. روی تخته کاملاً شبیه کسرهای اعشاری امروزی نشان داده می‌شد و هر رقم دقیقاً در جای خودش بود، ولی همینکه از تخته جدا می‌شد و نتیجهٔ عمل به صورت نوشته درمی‌آمد، صورت منطق متری، یعنی رقمهایی با نامهای مخصوص، به خود می‌گرفت، درست مثل شمار لفظی که یک دستگاه موضعی با ترکیب ضربی است. ما شاهد روش سون‌تسه‌زی و تلاش او برای بیرون آمدن از این وضع بودیم، و ضمناً دیدیم که چگونه با سختی توانست به این امر موفق شود.

از این به بعد کسرهای متعارفی و اعشاری در پیشرفت ریاضیات به دو راه مختلف افتادند. کسر، به عنوان نسبت دو عدد، مبنائی برای تعمیم بعدی مفهوم عدد شد و این امکان بدست آمد که حوزه‌های عددی مختلف جبر امروزی ساخته شود. این جنبهٔ جبری تعمیم مفهوم عدد بود.

اگر کسرهای متعارفی، اشیاء ساده‌ای هستند که عملیاتی طبق قاعده‌های معلوم روی آنها انجام می‌شود، کسرهای اعشاری مفهوم بینهایت و مسئله‌های ناشی از آنرا بالقوه در درون خود داشتند.

کسر اعشاری اساسی برای تعمیم و پیشرفت مفهوم تقریب در حوزهٔ رشته‌ها و کسرهای مسلسل شد، بدون تردید، نیوتون برای تجزیهٔ تابع به صورت یک رشته، از فکر کسر اعشاری الهام گرفته است، زیرا کسر اعشاری مثل رشتهٔ پیوسته‌ای است که در آن هر رقم معرف درجه‌ای از دقت مقدار واقعی عدد است. این جنبهٔ تحلیلی تعمیم مفهوم عدد است.

٦

ریاضیات شرق میانه و نزدیک در سده‌های میانه

س. ا. کرانسوا ـ ب. آ. روزنفلد ـ آ. ك. كوپسف

معلم ریاضی باید با تاریخ علوم ریاضی آشنائی کامل داشته باشد، زیرا تنها در پرتو درک سیر تاریخی مطالب است که میتواند مفاهیم ریاضی را برای شاگردان خودقابل فهم و روشن نماید.

ریاضیات معاصر تاحد زیادی مدیون دانشمندان شرق‌میانه می‌باشدکه جبر و مثلثات را بعنوان علوم مستقلی از ریاضیات بوجود آوردند و فعالیتهای علمی آنها در زمینهٔ حساب و هندسه، مقدمات اساسی را برای کشفیات مهم ریاضی‌دانان اروپا در سده‌های ۱۷ تا ۱۹ فراهم کرد. تنها در سالهای اخیر پی به آثار مهم و باارزش ریاضی‌دانان شرق میانه برده‌اند.

در بسیاری از نوشته‌ها، اطلاعات نادرستی دربارهٔ نقش این دانشمندان در تاریخ علوم ریاضی وارد شده است. همهٔ فعالیتها و آثار مستقل دانشمندان شرق میانه و نزدیک نفی میشود و گمان میکنند که نقش آنها تنها ترجمهٔ آثار و نوشته‌های دانشمندان یونانی و هندی بوده است. علاوه بر آن چون همهٔ این دانشمندان کتابهای خود را بزبان عربی (که زبان علمی بین‌المللی آنزمان بود) می‌نوشتند، بغلط آنها را غالباً بنام «اعراب» نام می‌برند.

در این مقاله مختصری دربارهٔ موفقیتها و کوششهای ریاضی‌دانهای شرق میانه و نزدیک در سده‌های ۹ تا ۱۵ بحث شده است.

۱ـ ریاضیات در کشورهای شرق میانه و نزدیك در سده‌های ۹ و ۱۰

قلمرو کشورهای شرق میانه و نزدیک عبارتست از آسیای میانه، ایران، سوریه، عراق و مصر. این کشورها از قدیمیترین ازمنهٔ تاریخی دارای تمدن و فرهنگ فوق‌العاده غنی و بکر بوده‌اند. موفقیتهائی که در زمینهٔ ریاضی بدست آمده است بیش از همه مربوط به مصر و بخصوص بابل قدیم میباشد. ما دربارهٔ وضع علم در ایران باستان و آسیای میانه اطلاعی در دست نداریم، ولی بدون تردید در این کشورها هم علم به موفقیتهائی رسیده بوده است.

در سرزمینهای «یونانی» ریاضیات به موفقیتهای جدی نائل شد و درسطح بالائی قرار گرفت. فرهنگ این دوران ترکیبی از تمدنهای قدیمی مشرق زمین و یونان باستان بود. مهمترین مرکز ریاضی در این زمان اسکندریه بود که درآنجا اقلیدس، آپولونیوس و بعداً هرون، بطلمیوس، کلودیوس و دیوفانتوس فعالیت میکردند. ارشمیدس هم ارتباط جدی با دانشمندان اسکندریه داشت. در اواسط هزارهٔ اول بعد از میلاد، سرزمینهای مصر، سوریه، فلسطین، ایران و آسیای میانه در رشته‌های مختلف علوم و فرهنگ دارای سنتهای غنی و بکر بودند و تقریباً در همین زمان فرهنگ و تمدن ملتهای شرق میانه و نزدیک با هند و سپس با چین ارتباط پیدا کرد.

در قرنهای هفتم و هشتم، کشورهای شرق میانه و نزدیک بوسیلهٔ اعراب مسخر شد، این تسخیر با گسترش و نفوذ مذهب اسلام و زبان عربی همراه بود. کشورگشائی اعراب غالباً همراه با کشتار دانشمندان و نابود کردن کتابهائی بود که بزبان محلی نوشته بود. مثلاً **ابوریحان بیرونی**، دانشمند قرن یازدهم خوارزم، دربارهٔ فتح خوارزم بوسیلهٔ اعراب چنین می‌نویسد:

«. . . قتیبه همهٔ کسانی را که بزبان خوارزمی مینوشتند، یا به ادبیات و افسانه‌های ملی آشنا بودند و (علوم را) تدریس میکردند از بین برد. وضعی برای خوارزم بوجود آورد و چنان صدماتی به اهالی آنجا زد و (روایات ملی) را چنان نابود کرد که حتی از تاریخ بعد از اسلام خوارزم هم نمی‌توان اطلاعی بدست آورد».*

*) ـ بیرونی ـ کتاب آثارالباقیه عن‌القرون‌الخالیه

ولی علم در کشورهای اشغال شده بکلی ازبین نرفت، بلکه شکل جدیدی بخود گرفت. همانطور که در کشورهای «یونانی»، زبان یونانی و در اروپای سده‌های میانه زبان لاتینی، زبان رسمی بود، زبان علمی این کشورها هم تنها زبان عربی بود. این شکل جدید علوم پشتیبانی بعضی از حکام مسلمان را بدست آورد. در بغداد و سایر شهرهای حکومت جدید، کتابخانه‌ها، مدارس و رصدخانه‌هائی بوسیلهٔ خلفا تأسیس شد و کار ترجمه بزبان عربی مورد تشویق قرار گرفت، در قرن هشتم **محمدبن ابراهیم‌الفزاری** یکی از آثار هندی را بنام **«سیدهانتا»** که مربوط به نجوم بود بعربی ترجمه کرد. این رساله در سدهٔ پنجم تا هفتم تحت تأثیر بطلمیوس و سایر منجمین اسکندریه تدوین شده بود. اولین قسمت «سیدهانتا» عبارت از «پلیزا سیدهانتا» بود که منتسب به «پلیزا» یونانی است که در سدهٔ پنجم از دست متعصبین مسیحی‌که مکتب علمی اسکندریه را از بین برده بودند فرار کرد.

پایه‌گذار مکتب ریاضی بغداد **محمدبن موسی خوارزمی** ملقب به المجوسی است (حدود ۷۵۰ تا ۷۸۰ میلادی) که در خوارزم متولد شده بود. نام «المجوسی» نشان میدهد که خوارزمی ازاخلاف مغ‌های زردشتی بوده است. بدون تردید مأخذ اصلی اطلاعات خوارزمی به علوم قبل از اسلام در آسیای میانه میرسدکه بوسیلهٔ مغها نگهداری میشد. خوارزمی دربغداد دردربار مأمون‌خلیفهٔ عباسی فعالیت میکرد (۸۱۳–۸۳۳ میلادی)، او یکی از رهبران مرکز علمی نجوم بغداد بود که در آن بزرگترین دانشمندان آسیای میانه مشغول بودند: محمدالفرغانی که در سرزمین فرغانه متولد شده بود و احمدالمروزی متولد در مرو (واقع در ترکمنستان امروزی اتحاد شوروی). از خوارزمی نوشته‌ای دربارهٔ حساب بنام «کتابی دربارهٔ محاسبهٔ هندی» و رساله‌ای دربارهٔ جبر بنام «خلاصه‌ای از حساب جبر و مقابله»، جدولهای نجومی و رساله‌ای دربارهٔ جغرافیا بما رسیده است.

خوارزمی در اروپای غربی شهرت بسزائی داشت. دو رسالهٔ ریاضی خوارزمی در اروپای قرون وسطی به زبان لاتینی ترجمه شد. نام «الخوارزمی» بشکل «Algorithmus» روی کلمهٔ «آلگوریتم» باقی مانده است. دو کلمهٔ «الجبر و المقابله» که در عنوان رسالهٔ جبر آمده بود بیان کنندهٔ دو عمل سادهٔ

جبری بود و به علمی گفته میشد که دربارهٔ حل معادلات بحث میکرد. در رسالهٔ مربوط به حساب، خوارزمی نشان میدهد که چطور میتوان هر عدد دلخواه را با کمک «نه رقم هندی» وصفر نوشت. سپس اعمال مربوط به‌جمع، تفریق، دو برابر کردن، نصف‌کردن، ضرب، تقسیم وجذر گرفتن از اعداد صحیح وهمچنین‌عملیات محاسبه‌ای مربوط به کسرهای شصت شصتی را شرح میدهد. در کسرهای شصت‌ـ شصتی، ارقام از ۱ تا ۵۹ با الفبای عربی بترتیب حروف «ابجد» نوشته میشد، صفر با علامت σ نشان داده میشد که از $\overline{O}$ گرفته شده است و مربوط به منجمین اسکندریه است. طرز کار خوارزمی هم مثل هندیها با کمک تخته حساب انجام میشد. خوارزمی جذر اعداد را با شیوهٔ ریاضی‌دان ومنجم سدهٔ پنجم هندآریابهاتا میگرفت که براساس مجذور یک دو جمله‌ای قرار داشت.

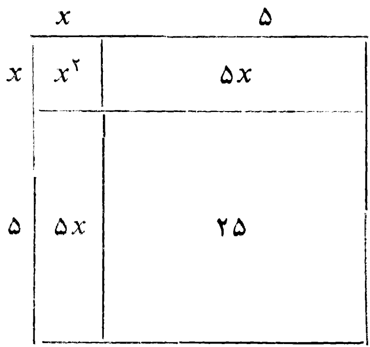
همانطورکه گفته شد، رسالهٔ جبر خوارزمی اسم خود را از دو عمل مربوط به جبر گرفته است. یکی از آنها «جبر» (بمعنی تحت‌اللفظی جبران کردن) بمفهوم انتقال هر جملهٔ منفی بطرف دیگر معادله است که در این صورت جملهٔ منفی به جملهٔ مثبت تبدیل می‌شود (جبران میشود) دومین عمل «المقابله» (بمعنی در مقابل هم قرار دادن) بمفهوم حذف جملات مساوی از طرفین تساوی است. این دو عمل اجازه میدهدکه همهٔ معادلات درجه اول و درجه دوم جبری را بساده‌ـ ترین صورت خود تبدیل کنیم. صورت این معادلات از نظر خوارزمی شش نوع بود:

$$bx = a \text{ و } cx^۲ = a \text{ و } cx^۲ = bx \text{ و } cx^۲ + bx = a$$
$$cx^۲ + a = bx \text{ و } cx^۲ = bx + a$$

خوارزمی همهٔ این معادلات را با کمک شرح و جمله مینوشت (و نه بوسیلهٔ فرمول) و همهٔ ضرایب a، b و c را مثبت فرض میکرد. خوارزمی ریشهٔ معادلات را جذر و یا «شییء» و مجذور یک عدد را «مال» مینامید. خوارزمی حل معادلات درجه دوم را با همان روش امروزی و بر پایهٔ استدلال هندسی، منتهی با کمک جملات توضیحی، انجام میداد. مثلاً معادلهٔ: «مجذور و ده برابر شییء مساوی ۳۹ است» یعنی $x^۲ + ۱۰x = ۳۹$ بصورت زیر حل میشد:

مربعی بضلع «شییء» مجهول رسم می‌کنیم و بنابراین مساحت آن مساوی

x^2 میشود، سپس چسبیده باین مربع دو مستطیل که طول هر دو مساوی «شیىء» و عرض هر یک مساوی ۵ باشد رسم مینمائیم و بنابراین مساحت مجموع آنها مساوی ۱۰x میشود (شکل ۱۶).



شکل ۱۶

طبق شرط مسئله مساحت شکل بدست آمده (که بشکل Γ است) بایستی مساوی ۳۹ باشد. این شکل بوسیلهٔ مربعی بضلع ۵ تبدیل بیک مربع کامل میشود. ازآنجا ضلع مربع بزرگ برابر با ۸ میشود و بنابراین «شیىء» مساوی ۵ — ۸ یعنی ۳ خواهد بود.

اگر خوارزمی در رسالهٔ حساب خود از روش هندیها پیروی کرده است، در عوض در رسالهٔ جبر خود نه از روش ریاضی‌دانهای هندی تقلید کرده است و نه از روش «حساب» دیوفانتوس. میتوان تصور کرد که خوارزمی بیشتر رسوم و عقاید محلی را تعقیب کرده است.

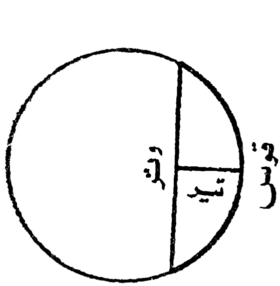
خوارزمی برای حل از ضرب اعداد گنگ (ریشه دوم) استفاده میکرد، مثلاً:

$$\sqrt{10}\times\sqrt{5}=\sqrt{50};\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{1}{6}}$$

خوارزمی در فصل «دربارهٔ معادلات» مسائلی را طبق قواعد سه‌گانه‌ای که

در هندوستان معمول بوده است مطرح میکند و در فصل «دربارهٔ اندازه‌گیری» جبر را برای اندازه‌گیری اشکال هندسی مورد استفاده قرار داده است. دسته‌بندی مثلثها و چهارضلعی‌ها و قاعدهٔ تشخیص انواع مثلث را برپایهٔ «مقدمات» اقلیدس و «اندازه‌گیری» هرون انجام داده است. خوارزمی برای نسبت محیط دایره به قطر آن سه مقدار پیشنهاد میکند: $۳\frac{۱}{۷}$، $\sqrt{۱۰}$ و $\frac{۶۲۸۳۲}{۲۰۰۰۰}$، دو مقدار اخیر را در نوشته‌های براهماگوپتا و آریابهاتا ریاضی‌دانان هندی هم میتوان پیدا کرد. رساله با فصل بزرگ «کتاب دربارهٔ وصیت‌نامه‌ها» تمام میشود که پر است از مسائل بغرنج و پیچیده‌ای دربارهٔ تقسیم ارث که منجر به معادلات خطی میشود، اینگونه مسائل که ناشی از فقه اسلامی است درکتابهای جبر و حساب کشورهای اسلامی زیاد بچشم میخورد. رسالهٔ مشابهی دربارهٔ جبر از «ابن ترك (الختلی)» وجود دارد که قسمتی از آن بما رسیده است.

رسالهٔ نجوم خوارزمی شامل جدول سینوسهاست. سینوسها (و یا دقیق‌تر خطوط سینوسی) را برای اولین بار منجمین قرون ۵ تا ۷ هندی وارد ریاضی کرده بودند. منجمین اسکندریه از وترهائی استفاده میکردند که اضلاع زاویه را بهم وصل میکرد. هندیها وترها و سپس نیم وترها یعنی خطوط سینوسی را «جیا» (بمعنی وتر) مینامیدند و کلمهٔ یونانی «chorda» هم بهمین معنی است. متذکر میشویم که کلمهٔ یونانی که برای قوس بکار میرود بمعنی کمان است و خطی که وسط وتر را به وسط قوس مربوط میکند «تیر» مینامیدند (شکل ۱۷).



شکل ۱۷

الفرازی در ترجمهٔ خودش از کتاب هندی بجای قوس و تیرکلمات عربی آنرا بکار برد، ولی‌کلمهٔ «جیا» که در این زمان برای نیم وتر و نه تمام وتر بکار میرفت دیگر با کلمهٔ «وتر» قابل بیان نبود: زیرا این کلمه معرف وتر کامل بود. باین ترتیب بجای‌کلمهٔ «جیا» کلمهٔ عربی «جیب» گذاشته شد که بمعنی «گریبان» است، ایـن کلمه از طریق زبان عربی وارد ادبیات علمی شد و بوسیلهٔ مترجمین قرون وسطی به زبان لاتینـی به «سینوس» ترجمه شد که همین معنـی را میدهد. جداول تانژانت و کتانژانت هم در جدولهای المروزی وجود داشت.

کارهای خوارزمی، بخصوص آنچه که در زمینهٔ حساب و جبر انجام داده بود، تأثیر فوق‌العـاده زیادی روی تکامل ریاضیـات در کشورهـای اسلامی و اروپائی باقی گذاشت.

قسمت عمدهٔ کارهای ریاضی‌دانان بغداد در سده‌های نهم و دهم عبارت از ترجمه و توضیح نوشته‌های مؤلفین یونانی، بزبان عربی بود. درعرض ۱۰۰ تا ۱۵۰ سال مترجمین، کتابهای اقلیدس، ارشمیدس، آپولونیوس، هرون، بطلمیوس و دیوفانتوس را از زبان‌های یونانی و سریـانی بزبان عربـی ترجمه میکردند. «مقدمات» اقلیدس در اواخر قرن هشتم و یا اوایل قـرن نهم بوسیلـهٔ **حجاج*** به زبان عربی ترجمه شد. اولین بحث مشهـور دربـارهٔ «مقدمـات» اقلیدس بوسیلهٔ **جوهری** (عباس‌بن‌سعید) همکار خوارزمی در کتاب «اضافاتی برکتاب مقدمات» انجام گرفت. چیزی که در این کتاب جالب است کـوششی است که برای اثبات اصل موضـوع اقلیدس (پـوستولات پنجم) انجـام گرفته و تأثیر زیـادی روی ریاضی‌دانان بعدی در بارهٔ نظریهٔ خطوط موازی گذاشته است.

درکوششی‌که جوهری برای اثبات اصل موضوع اقلیدس بکار برده است، این فرض را واضح فرض میکند که از هرنقطهٔ واقع در داخل یک زاویه میتوان خطی رسم کرد که هر دو ضلع زاویه را قطع کند. در حقیقت این فرض معادل با اصل موضوع اقلیدس است، زیرا در هندسهٔ **لباچوسکی** که در آنجا پوستولات پنجم اقلیدس وجود ندارد، از هر نقطهٔ داخل زاویه نمیتوان چنین خطـی را رسم

---

*) حجاج‌بن یوسف‌بن مطر (۷۸۶ـ۸۳۵) که در زمان هارون‌الرشید و مأمون خلفای عباسی میزیست و کتـاب «مقدمات» اقلیدس را بهخـواست یحیـی برمکی ترجمه کرد (مترجم).

کرد، در اواخر قرن هیجدهم **لژاندر** ریاضی‌دان فرانسوی هم برای اثبات اصل اقلیدس دچار همین اشتباه شد.

کوشش برای اثبات اصل موضوع اقلیدس نقش اساسی در تاریخ هندسه داشته است، زیرا این کوششها منجر به کشف لباچوسکی در ساختن «هندسهٔ غیر اقلیدسی» شد که در آن تمام اصول هندسهٔ اقلیدسی بجز پوستولات پنجم آن در نظر گرفته شده است.

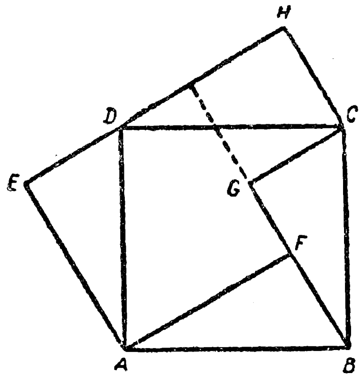
یکی از اولین کسانی که دراین بحث وارد شد ریاضی‌دان ایرانی **ماهانی** (ابوعبدالله، محمدبن عیسی وفات در سال ۸۸۰ میلادی) بود. ماهانی در رسالهٔ «دربارهٔ نسبتها» کوشش میکند نظریهٔ کلی و مشکل نسبتها را در کتاب پنجم «مقدمات» روشن کند، زیرا اقلیدس احتیاجی به توضیح محاسبات ریاضی و اندازه‌گیریها ندیده بود. بعد از ماهانی دانشمندان زیادی کوشش کردند که بین نظریهٔ عمومی نسبتهای کمیتهای متصل با نظریهٔ نسبتهای عددی ارتباطی برقرار کنند. ماهانی همچنین توضیحاتی هم بررسالهٔ ارشمیدس «دربارهٔ کره و استوانه» نوشته است.

دیگر ازریاضی‌دانان این دوره **فضل نیریزی** (وفات ۹۲۲ میلادی) است که بر ۱۰ کتاب اول «مقدمات»، اقلیدس شرحی نوشته است. از بحث نیریزی تنها به اثبات معمولی قضیهٔ فیثاغورث توجه می‌کنیم:

در قضیهٔ فیثاغورث باید ثابت کرد مربعی که روی وتر مثلث قائم‌الزاویه ساخته میشود برابر است با مجموع مربعاتی که روی اضلاع مجاور به زاویهٔ قائمه ساخته میشود. نیریزی مربع $ABCD$ را روی وتر رسم کرد (شکل ۱۸) و روی هریک از اضلاع این مربع، مثلث مفروض را رسم کرد بطوریکه دوتای آنها در خارج و دوتای دیگر در داخل مربع قرار گیرند.

دو مثلثی که در داخل مربع ساخته‌ایم از آن حذف میکنیم و در عوض دو مثلثی که در بیرون مربع ساخته شده بآن اضافه کنیم، شش ضلعی $AFGCHE$ بدست می‌آید که با مربع ما معادل است و بسادگی روشن میشود که شش ضلعی بدست‌آمده از دو مربع تشکیل شده که برابر با مربعهائی هستند که روی اضلاع مجاور زاویهٔ قائمه ساخته میشوند.

در بحث نیریزی اثبات اصل موضوع اقلیدس هم وجود دارد. این



شکل ۱۸

استدلال بر پایهٔ این قضیه گذاشته شده است که: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط مستقیم بیک فاصله بوده و در یکطرف آن واقع باشند یک خط مستقیم است. ولی این فرض هم در حقیقت معادل با فرض پوستولات پنجم اقلیدس است. در هندسهٔ لباچوسکی مکان چنین نقاطی خط مستقیم نیست، بلکه یک خط منحنی است. نیریزی در بحث خود نظریهٔ نسبتها را هم مورد توجه قرار داده است.

یکی از مشهورترین ریاضی‌دانان حوزهٔ علمی بغداد **ثابت‌بن‌قرة‌الحرانی*** بود (۸۳۶–۹۰۱ میلادی) ثابت‌بن‌قره در بحث خود دربارهٔ اقلیدس و در رسالهٔ «دربارهٔ تشکیل نسبتها» باین مطلب برخورد میکند که اقلیدس هم مفهوم تشکیل نسبتهای کمیتهای متصل را بکار برده است (مثلاً نسبت $\frac{A}{B}$ از نسبتهای $\frac{A}{C}$ و $\frac{C}{B}$ تشکیل میشود. وقتی که آنها را در یکدیگر ضرب کنیم) و این قدم بزرگی ازنظر مبحث مربوط به کمیتهای متصل در حساب بشمار میرود که بدنبال آن مفهوم عدد حقیقی بوجود آمد.

---

*) ثابت‌بن‌قره‌بن مروان‌بن ثابت ابوالحسن‌الحرانی از اهالی حران واز فرقه صابئه بوده است. (مترجم)

همانطور که می‌بینیم مفهوم عدد حقیقی برای اولین بار در قرون وسطی و در شرق میانه بوجود آمد و بعداً در اروپا در قرن ۱۷ و در هندسهٔ **دکارت** ظاهر شد که در آنجا بکمک این اعداد کمیتهای متغیر را توضیح میدهد. اعداد حقیقی از نظر دکارت فرم هندسی داشتند ولی بزودی و درهمان قرن ۱۷ از تعبیرهندسی خود آزاد شدند و نیوتون نسبت هردو پاره خط دلخواه را عدد حقیقی نامید. ورود اعداد حقیقی (که بکمک آن میتوان خصوصیت کمیتهای متغیر را معلوم کرد) تحول اساسی در تکامل ریاضی بشمار میرود، زیرا همین راه مستقیماً به کشف حساب دیفرانسیل و انتگرال منجر شد.

ابن قره در رسالهٔ «در بارهٔ اعداد متحابه» قضیهٔ اقلیدس را در بارهٔ اعداد کامل عمومیت داد (عدد کامل به عددی گویند که مساوی مجموع مقسوم‌علیه‌های خود باشد) وقاعدهٔ تشکیل اعداد متحابه را طرح کرد، یعنی اعدادی که هریک از آنها مساوی مجموع مقسوم‌علیه‌های دیگری باشد. ابن قره برای نخستین بار در شرق میانه مسئلهٔ اندازه‌گیری سهمی را در رسالهٔ «دربارهٔ اندازه‌گیری مقطع مخروطی بنام‌سهمی» مورد مطالعه قرار داد. روش ابن‌قره با روش ارشمیدس بکلی فرق دارد: ابن قره سهمی را وارد دستگاه مختصات میکند (که در آن با معادلهٔ $x = y^2$ بیان میشود) ومحور طولها را به پاره خطهای نامساوی متناسب با اعداد فرد متوالی تقسیم میکند. در اینصورت طولهای نقاط تقسیم اعداد مجذور کاملی خواهند بود و عرض‌های متناظر این نقاط از سهمی اعداد صحیحی خواهند شد. سپس ابن‌قره رشتهٔ حسابی کمکی تشکیل میدهد و مجموع انتگرالی پیدا میکند که با کمک آن مساحت یک قطعه از سهمی را محاسبه میکند. درحقیقت محاسبهٔ ابن‌قره معادل با محاسبهٔ انتگرال تابع $y = \sqrt{x}$ است.

ابن قره در رسالهٔ «کتابی در این باره که دو خط ضمن قطع خط سوم، در طرفی که دو زاویهٔ کوچکتر تشکیل میدهند یکدیگر را قطع می‌کنند» دربارهٔ نظریهٔ خطوط موازی بحث میکند و میکوشد تا اصل موضوع اقلیدس را ثابت کند. ابن قره هم مثل نیریزی استدلال خود را بر این پایه میگذارد که مکان هندسی نقاطی از صفحه که در یکطرف خطی واقع بوده و از آن خط بیک فاصله باشند، خط مستقیم است. ولی ابن قره این مطلب را واضح فرض نمیکند و کوشش میکند تا آنرا بر پایهٔ علم‌الحرکات توضیح دهد (با کمک مطالعهٔ

حرکت در طول خط راست مفروض).

ابونصر فارابی (۸۷۰–۹۵۰ میلادی) متولد شده در فاراب کازاخستان جنوبی که بزرگترین فیلسوف زمان خود بود با بحث در بارهٔ «مقدمات» نقش اساسی در علاقمند کردن دانشمندان آنزمان بطور کلی بطرف علوم ریاضی و بخصوص بطرف مباحث اقلیدسی ایفا کرد. فارابی یکی از بزرگترین فلاسفهٔ مشرق زمین است و یکی از کسانی است که فلسفهٔ ارسطوئی را در مشرق‌زمین پایه‌گذاری کرده است. علاقهٔ فارابی به کتاب «مقدمات» اقلیدس باین مناسبت است که این کتاب بر اساس کاملاً منطقی و برپایهٔ تعاریف و اصول بنیان گذاشته شده است.

وقتی که فارابی در بارهٔ تعاریف اقلیدس از نقطه، خط، صفحه و غیره بحث میکند مینویسد: «برای یاد دادن بایستی ابتدا از جسم محسوس شروع کرد و سپس به جسم قابل بررسی پرداخت یعنی به جسمی که از تمام محسوسات مربوط به خود منتزع شده باشد و سپس سطح، بعد خط و بالاخره نقطه را توضیح داد». این بیان، تکامل مطلب مشهور ارسطو است که میگفت مفاهیم ریاضی از راه انتزاع از اشیاء حقیقی بوجود آمده است. فارابی بقیهٔ تعاریف ریاضی را هم از نظرگاه منطق ارسطو مورد بررسی قرار داده است. فارابی صاحب تألیف بزرگی است بنام «کتاب بزرگی دربارهٔ موسیقی» که در آن نظریهٔ ریاضی موسیقی را شرح داده است.

درقرنهای نهم ودهم میلادی **ابوکامل شجاع مصری** (حدود ۸۵۰ تا ۹۳۰ میلادی) در قاهره فعالیت میکرد. او صاحب تألیفی است بنام «کتابی دربارهٔ جبر و مقابله» که در شناساندن و پخش کردن افکار خوارزمی چه در شرق و چه در غرب نقش اساسی داشته است. ابوکامل همان مسائل خوارزمی را مورد بررسی قرار میدهد، ولی آنها را دنبال میکند و جلو میبرد. او تعداد زیادی از مسائل مربوط به معادلات درجه دوم را حل کرده است و دربارهٔ اعداد گنگ اعمال بغرنجی انجام داده است. او همچنین در رسالهٔ «کتاب اندازه‌گیری» از جبر استفاده کرده است. رسالهٔ دیگری هم بنام «استثنائات در حساب» به ابوکامل نسبت میدهد که در آن مسائلی حل کرده است که منجر به معادلات چند مجهولی میشود.

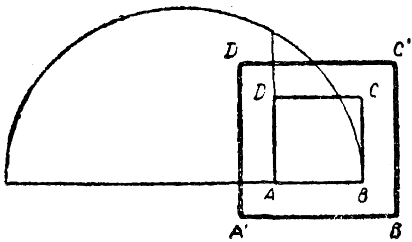
در قرن نهم و دهم در رصدخانهٔ نجومی رقه از بلاد سوریه منجم بزرگ ومشهور **ابوعبدالله محمد البتانی** فعالیت میکرد (حدود ۸۵۰–۹۲۹ میلادی). اثر معروف البتانی رسالهٔ «تکمیل‌المجسطی» مربوط به نجوم است که در آن نه‌تنها سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت در نظر گرفته شده، بلکه سکانت و کسکانت و حتی بسیاری از روابط بین آنها نیز مورد بحث قرار گرفته است. در این رساله روابط مهمی بین اضلاع مثلث کروی و یک زاویهٔ آن وجود دارد که امروز آنرا نظریهٔ کروی کسینوسها مینامند، این رابطه فی‌المثل اجازه میدهد که فاصلهٔ بین دو نقطه از کرهٔ زمین را که طول و عرض جغرافیائی آنها معلوم است معین کنیم و یا از مثلثی که اضلاع آن قوسهائی از دوایر عظیمه هستند با معلوم بودن اضلاع، زاویهٔ دلخواهی از آنرا معین کنیم.

در اواخر قرن دهم در بغداد در دربار سلطان شرف‌الدوله ریاضی‌دان برجستهٔ خراسان، **ابوالوفامحمد بوزجانی** زندگی‌میکرد (۹۴۰–۹۸۸ میلادی). ابوالوفا صاحب تألیف جالبی است دربارهٔ هندسهٔ عملی بنام «کتابی دربارهٔ آنچه برای صنعتکاران از ترسیمات هندسی لازم است». در این کتاب ترسیمات هندسی مهمی برای صنعتکاران و مساحان در نظر گرفته شده که با کمک خط‌کش و پرگار ثابت انجام میگیرد. ابوالوفا ثابت نمی‌کند که با این وسائل میتوان هر ساختمان هندسی را که با کمک خط کش و پرگار معمولی میتوان ساخت، انجام داد، ولی تعداد زیادی مسئله حل میکند. غیر از مسائلی که با کمک خط کش و پرگار حل کرده است. ابوالوفا به مسائل لاینحل کلاسیک هندسی یعنی مسئله تضعیف مکعب (یا بقول ابوالوفا تضعیف «خانه» و «کره») و مسئله تثلیث زاویه (تقسیم زاویه به سه‌قسمت مساوی) هم پرداخته است. ابوالوفا درین مسائل از ارشمیدس و هرون تقلید کرده است. ابوالوفا راه ساختن چندضلعی‌های منتظم را نیز معین کرده است. برای این چند ضلعی‌ها (که میتوان آنها را بکمک خط کش و پرگار ساخت) بموازات راه حلهائی‌که اقلیدس داده است، راه‌حلهای جدیدی با کمک خط کش و پرگار ثابت بیان میکند. علاوه بر آن ابوالوفا با کمک تثلیث زاویه نه ضلعی منتظم را هم میسازد و طرز ساختن تقریبی ۷ ضلعی منتظم را هم بدست میدهد. او هرضلع ۷ ضلعی را مساوی با نصف ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی میگیرد که در همان دایره محاط شده باشد (با ترسیم ابوالوفا

ضلع ۷ ضلعی برابر با ...۰/۸۶۶ شعاع دایره میشود درحالیکه مقدارحقیقی آن مساوی ...۰/۸۶۸ این شعاع میباشد). ابوالوفا مسائلی هم دربارهٔ تبدیل مربع‌ها حل کرده است، از این مسائل، مسائل زیر را ذکر می‌کنیم:

مربعی بسازید که n مرتبه بزرگتر از مربع مفروض باشد.

برای‌اینکار یک ضلع مربع مفروض را ادامه داده و روی ادامهٔآن پاره‌خطی مساوی n برابرضلع مربع مفروض جدا می‌کنیم (شکل۱۹)، سپس پاره‌خطی مساوی با واسطهٔ هندسی بین ضلع مربع مفروض و n برابر آن میسازیم‌که همان ضلع مربع مجهول خواهد بود. همچنین مسئلهٔ ساختن مربعی مساوی با سه مربع مفروض با روشی که برای صنعتکاران مناسب باشد، خاطرنشان می‌کنیم:

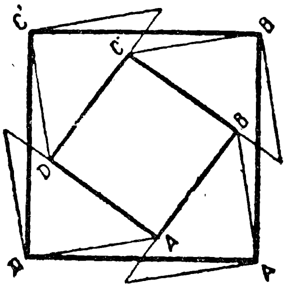


شکل ۱۹

در اساس، این مسئله حالت خاصی از مسئلهٔ بالا است ولی لازم است طریقه‌ای بدست صنعتکاران داده شود تا بکمک آن بتوانند سه صفحهٔ مربع شکل مساوی را بچنان قسمتهائی تقسیم کنند که از مجموع آنها مربع بزرگ بدست آید.

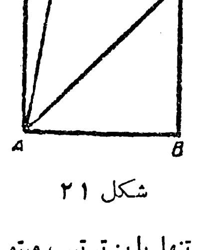
طریقهٔ ابوالوفا بر این مبناست که از سه مربع مفروض، دو مربع را به وسیلهٔ قطر به دو قسمت مساوی تقسیم میکند و چهار مثلث بدست‌آمده را روی مربع سوم مطابق شکل۲۰ قرار میدهد، بعداً رئوسی از این مثلثها را که روبروی اضلاع مربع قرار گرفته است بوسیلهٔ پاره خطهائی بهم مربوط می‌کند و با قسمتهائی از این مثلثها که بوسیلهٔ این پاره‌خطها بریده شده است، جاهای خالی را پر میکند.

علاوه بر این روش که برای صنعتکاران مناسب و راحت است، ابوالوفا



شکل ۲۰

طریقهٔ دیگری هم پیشنهاد میکند که آنرا «روش هندسه‌دانهـا» نام گذاشته است. طبق این روش ضلع مربع مجهول برابر است با قطر مکعبی که بعد آن برابر با ضلع یکی از مربعهای مفروض باشد. این طریقه از اینجهت جالب است که اگر مکعب را به متوازی‌السطوح تبدیل کنیم میتوان با کمک آن ضلع مربعی را که هم ارز با سه مربع نامساوی است بدست آورد. ابوالوفا پس ازشرح این طریقه (که در شکـل ۲۱ نمایانـده شده است) توضیح میدهد که بطریق مشابهی میتوان این روش را برای حالتی که تعداد مربعها بیش از سه عدد باشد نیز بکار برد.



شکل ۲۱

اینمطلب ابوالوفا را تنها باین‌ترتیب میتوان فهمیدکه پیش خود مکعبهای

چند بعدی مجسم کنیم، از آنجا ضلع مربعی که معادل با n مربع مساوی باشد، برابر است با قطر یک مکعب n بعدی که هر بعد آن برابر با ضلع یکی از مربعهای مفروض باشد. همین امروسیله‌ای شدکه جبردانهای شرق میانه ازتوانهای x^4، x^5 و x^6 استفاده میکردند و مثل دیوفانتوس آنها را «مال‌المال» (مربع مربع)، «مال‌الکعب» (مربع‌مکعب) و «کعب‌الکعب» (مکعب مکعب) مینامیدند. ابوالوفا که خودش بر کتاب «حساب» دیوفانتوس تفسیر مینوشت به این اصطلاحات کاملاً آشنا بود. همانطورکه از این مطالب دیده میشود ابوالوفا این اصطلاحات هندسی را بعنوان تعمیم مکعب درک میکرد.

ابوالوفا طرز ساختن سهمی را هم توضیح میدهد، او سهمی را «آئینه سوزنده» مینامید، در حقیقت در این نامگذاری به این خاصیت اساسی سهمی توجه داشت که اگر یک دسته اشعهٔ موازی با محور سهمی بر آن بتابد پس از برخورد با سهمی منعکس شده و در کانون آن جمع میشوند و اگر در کانون مواد قابل اشتعالی قرار داده باشیم، منفجرخواهند شد (از همین جا علت نامگذاری «کانون» هم معلوم میشود که بمعنی«اجاق» است). ابوالوفا سهمی $y^2 = 2px$ را با نقطه‌یابی رسم میکند. هندسه‌دانهای قرون وسطی در مشرق بطرز ساختن بیضی وهذلولی هم از طریق نقطه‌یابی آگاهی داشتند، بعلاوه رسم بیضی با کمک نخ را هم میدانستند. نخ را با کمک اسباب مخصوصی که «پرگار کامل» مینامیدند درکانونهای بیضی محکم میکردند و با کمک آن میتوانستند بیضی، سهمی و هذلولی را با هر فاصلهٔ کانونی دلخواه رسم کنند.

یکی از فصول رسالهٔ ابوالوفا به ساختمانهای هندسی روی‌کره اختصاص دارد که در آن بخصوص طریقه ساختن چند وجهی‌های منتظم و نیمه منتظم را که قابل محاط در کره باشند توضیح میدهد.

رسالهٔ دیگری نیز بنام «کتابی در این باره که چه مطالبی از علم حساب برای محاسبین و کتاب لازم است» دربارهٔ حساب و جبر از ابوالوفا باقی مانده است. ابوالوفا در این کتاب از ارقام هندی هیچ استفاده‌ای نکرده و همهٔ اعداد را با حروف نوشته است (این طرز نوشتن دربین تجار مشرق زمین متداول بود و بعدها از همین طریقهٔ عددنویسی، ارقام «سیاق» بوجود آمد). دراین کتاب از کسرهای مصری بطور وسیعی استفاده شده است (این کسرها همه کسری از

واحد بودند).

باین مطلب باید توجه داشت که در این کتاب، اعداد منفی فقط در حالت خاصی که آنرا دین (قرض) مینامید بکار برده میشد. این تنها نمونه مشهوری از استعمال اعداد منفی درشرق میانه و نزدیک است، درحالیکه چینی‌ها از سدهٔ اول قبل ازمیلاد و هندیها از سدهٔ ششم میلادی با اعداد منفی کار میکردند.

ابوالوفا روی «المجسطی» بطلمیوس‌هم کار کرده است و بمناسبت آن روابط کاملاً جدیدی درمثلثات مطرح کرد و جداول سینوسی را خیلی دقیق‌تر از آنچه که قبل از او بوده است تنظیم کرد. ابوالوفا یکی از نخستین طریقه‌های اثبات قضیهٔ کروی سینوسها و اثبات قضیهٔ تانژانتها در مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی را بدست میدهد.

کارهای ریاضی‌دان و منجم کوهستان طبرستان (در جنوب شرقی دریای خزر) **ابوسهل کوهی** هم بهمین دوره مربوط است. کوهی که در اواخر سدهٔ دهم در بغداد میزیسته بحثهائی دربارهٔ «مقدمات» اقلیدس و کتاب «دربارهٔ کره و استوانه» ارشمیدس و همچنین یک سلسله رساله دربارهٔ هندسه و نجوم دارد. آخرین اثرکوهی کتابی است بنام «تصحیح نواقص کتاب، دوم ارشمیدس دربارهٔ کره . و استوانه» در این کتاب کوهی مسئلهٔ جدیدی را طرح و حل میکند که منجر بیک معادلهٔ درجه سوم میشود و ارشمیدس بآن توجه نکرده بود. این مسئله عبارتست ازساختن قطعه کره‌ای که حجم آن برابر با حجم یک قطعه کره و سطح آن برابر باسطح قطعهٔ کرهٔ دیگر باشد. کوهی این مسئله را به شیوهٔ ریاضی‌دان یونانی و بکمک تقاطع سهمی و هذلولی حل میکند. کوهی استدلال مخصوص بخودی هم دربارهٔ این قضیهٔ ارشمیدس دارد که از بین قطعه کره‌هائی که سطح مساوی دارند، نیم کره دارای حجم بیشتری است.

یکی از مشهورترین ریاضی‌دانهای این عصر **ابوبکرمحمدکرجی** (وفات در ۱۰۱۶ میلادی) میباشدکه ایرانی بود وبعضی هم او را بنام **کرخی** نامیده‌اند، کرجی رساله‌ای دارد بنام «کتاب کافی در حساب» و رساله‌ای هم در جبر بنام «الفخری» دارد که آنرا به فخرالملک وزیر تقدیم کرده است. کرجی در رسالهٔ مربوط بحساب خود از حدود نوشته‌های خوارزمی و ابوکامل پا را فراتر میگذارد. کرجی نه فقط عملیات مربوط به ریشهٔ دوم را براحتی انجام میدهد

بلکه بهمان سادگی روی ریشه‌های سوم هم کار میکند.

مثلاً روابط:

$$\sqrt{۸}+\sqrt{۱۸}=\sqrt{۵۰} \text{ ؛ } \sqrt[۳]{۵۴}-\sqrt[۳]{۲}=\sqrt[۳]{۱۶}$$

را منظم میکند و بکمک آنها قضایای کتاب دهم «مقدمات» اقلیدس را تفسیر مینماید. در این رساله یک قسمت هندسی وجود دارد که در آن علاوه بر مطالبی که مورد بحث خوارزمی بود، بعضی از قضایای ارشمیدس، هرون و بطلمیوس و همچنین یک سلسله قواعد و مسائلی که ریشهٔ هندی دارند مطرح میکند. رسالهٔ حساب کرجی تحت نفوذ جدی رسالهٔ حساب ابوالوفا نوشته شده است.

همچنین کرجی تحت تأثیر تفسیری که ابوالوفا بردیوفانتوس نوشته بود رساله‌ای دربارهٔ جبر نوشت که در آن تا $x^{۶}$ و همچنین «مقادیر کسری» یعنی: $x^{-۱}$، $x^{-۲}$، $x^{-۳}$، $x^{-۴}$، $x^{-۵}$ و $x^{-۶}$ را مورد بحث قرار میدهد. کرجی علاوه بر معادلات درجه دوم، معادلات درجات بالاتری را هم که منجر به معادلهٔ درجه دوم میشوند مورد بحث قرار میدهد مثل:

$$ax^{۲n+m}+bx^{n+m}=cx^{m}$$

در رساله بیش از ۲۵۰ مسئلهٔ جبر و مسائل مربوط به معادلات سیال را حل میکند.

می بینیم‌که درجریان سده‌های ۹و ۱۰ میلادی ریاضیات تقریباً درهمه کشورهای شرق میانه و نزدیک با موفقیت تکامل پیدا کرد و دانشمندان این کشورها مهمترین موفقیتهای ریاضی‌دانهای یونانی و هندی را فراگرفته بودند. تحت تأثیر احتیاجات مربوط به تجارت، ساختمان و همچنین نجوم و جغرافیا توجه اساسی ریاضیات در این دوره روی ریاضیات محاسبه‌ای (حساب عملی، جبر عددی، مثلثات و هندسهٔ ساختمانی) متمرکز شده بود. در همین دوره کار دربارهٔ آثار کلاسیک یونانی و بخصوص دربارهٔ «مقدمات» اقلیدس شروع شده بود. این بحثها تا اندازه‌ای جنبهٔ فلسفه و منطق دارد ولی در عین حال شامل مسائل ریاضی مشخصی نیزهست و از میان آنها میتوان نظریهٔ نسبتها را شمرد که برای محاسبات ریاضی لازم بنظر میرسد.

۲ـ ریاضیات کشورهای شرق میانه و نزدیك در سده‌های ۱۱ و ۱۲

سدهٔ یازدهم سدهٔ جنگهای جدید است، در اواخر سدهٔ دهم و اوایل سدهٔ یازدهم بسیاری از کشورهای شرق میانه و نزدیک و شمال هندوستان گرفتار فتوحات لشکریان محمود غزنوی بود. در اواسط سدهٔ یازدهم، کشورهای شرق میانه و نزدیک بوسیلهٔ سلجوقیان چادرنشین اشغال شد و امپراطوری بزرگی تأسیس کردند که از دریای مدیترانه تا چین امتداد داشت.

حکیم عمرخیام یکی از دانشمندان این عهد مینویسد:

«ما شاهد هلاکت دانشمندان زیادی بودیم. تعداد دانشمندانی که از مرگ نجات یافته‌اند بسیار کم است و آنها هم متحمل رنج فراوان شده‌اند».

ولی پیشرفت علم حتی در چنین دوران سختی متوقف نشد. در سدهٔ یازدهم مراکز جدید علمی در آسیای میانه و ایران بوجود آمد.

یکی از ریاضی‌دانان مشهور سدهٔ یازدهم **ابوالحسن علی بن احمد نسوی** خراسانی است (حدود سال ۱۰۳۰ میلادی). نسوی ابتدا در ری و اصفهان کار میکرد و سپس بعد از اشغال این شهرها بوسیلهٔ محمود غزنوی به‌غزنین رفت، رسالهٔ او بنام «بحث جامعی دربارهٔ حساب هندی» اختصاص بحساب دارد و مربوط به موارد استعمال ارقام هندی است. در این رساله طریقه‌ای برای استخراج کعب ذکر شده که امروز آنرا طریقهٔ «**روفینی ـ هورن**» مینامند. نسوی برای ریشه‌گرفتن؛ از کسرهائی استفاده میکرد که در مخرج آنها توانی از ۱۰ باشد، مثلاً $\sqrt{۱۷}$ را بصورت $\frac{۴۱۲}{۱۰۰} \# \frac{۱}{۱۰۰}\sqrt{۱۷۰۰۰۰}$ حساب میکرد و جواب را هم با کسرهای شصتی شصتی میداد: ۴ «درجه» (واحد) ۷ «دقیقه» (یعنی $\frac{۷}{۶۰}$) و ۱۲ «ثانیه» (یعنی $\frac{۱۲}{۶۰^۲}$).

دراواخر قرن دهم و اوایل قرن یازدهم بزرگترین فیزیک‌دان قرون‌وسطی **ابوعلی الحسن بن هیثم** در قاهره کار میکرد (متولد در بصره) که بین اروپائیها به **الحازن** مشهور است. اثرمهم ابن‌هیثم «مناظر ومرایا» است که حاوی کشفیات بزرگی دربارهٔ ساختمان چشم و انعکاس و انکسار نور است. این کتاب که در

اروپا به لاتینی ترجمه شد، اساسی‌ترین راهنما دربارهٔ مبحث نور بود. در این کتاب ابن‌هیثم معادلات درجه چهار را مورد بررسی قرار میدهد. این معادلات ضمن تعیین مکان هندسی نقاط روشنی‌که از آئینه گرد استوانه‌ای منعکس‌میشوند (با مفروض بودن وضع نقاط و چشمها) بدست میآید. ابن‌هیثم راه حل هندسی این معادلات را بدست میدهد.

ابن هیثم دو کتاب دربارهٔ «مقدمات اقلیدس»، دارد یکی بنام «بحثی در بارهٔ بدیهیات کتاب اقلیدس» و دیگری «دربارهٔ برطرف کردن تردیدها در کتاب اقلیدس». ابن‌هیثم در کتاب اول خود اثبات اصل موضوع پنجم اقلیدس را مبنی بر ملاحظات علم‌الحرکات و شبیه آنچه که ثابت‌بن قره داده بود، میآورد. در رساله «دربارهٔ تقسیم خطی که ارشمیدس در کتاب کره و استوانه بکار برد»*، ابن هیثم راه حل معادلهٔ درجه سومی را میدهد که ماهانی ضمن حل مسئلهٔ ارشمیدس (دربارهٔ تقسیم کرهٔ مفروض به دو قسمت‌بطوریکه نسبت حجمهای آنها معین باشند) بآن رسیده بود. ابن‌هیثم در این استدلال هم مثل استدلال مربوط به اصل موضوع پنجم از حرکت استفاده میکند.

ابن هیثم در رسالهٔ «دربارهٔ اندازه‌گیری آئینه‌های سوزندهٔ مستدیر (سهموی)» حجم جسمی را محاسبه میکند که از دوران یک قطعه سهمی دور وتر آن بدست میآید. این محاسبه معادل محاسبهٔ انتگرال از توابع $y=x^3$ و $y=x^4$ میباشد. بعد از کارهای ارشمیدس دربارهٔ «تربیع» و «تبدیل به مکعب» که با انتگرال توابع $y=x$ و $y=x^2$ تطبیق میکرد، این کار (و در ردیف‌آن کارهای ابن قره) بهترین نتایج درین زمینه است که تنها درسدهٔ هفدهم دنبالهٔ آنها گرفته شد. در همین زمان ابن هیثم قاعدهٔ جمع کردن توانهای چهارم را هم بدست داد.

نیمهٔ اول قرن یازدهم دوران فعالیت یکی از بزرگترین دایرةالمعارف‌نویسان خوارزم، یعنی **ابوریحان محمد بیرونی** است (۹۷۳-۱۰۴۸ میلادی). پس از اشغال خوارزم بوسیلهٔ محمود غزنوی، بیرونی بعنوان اسیر به غزنین برده شد. بیرونی همراه با لشکرکشی محمود، به هندوستان رفت چند سالی در آنجا ماند و همانجا زبان هندی را آموخت. بیرونی در هندوستان عمیق‌ترین اثر

*) قول فی قسمة الخط الذی استعمله ارشمیدس فی کتاب الکره استوانه

خود را دربارهٔ نجوم و جهانشناسی مردم هندوستان نوشت.

بیرونی صاحب آثار زیادی دربارهٔ علوم دقیقه است. مشهورترین این آثار کتابی است بنام «قانون مسعودی» دربارهٔ نجوم و ستارگان که به سلطان مسعود غزنوی تقدیم کرده است. «قانون مسعودی» شامل ۱۱ کتاب است، کتاب‌های اول و دوم مربوط به گاه‌شماری و نجوم است. کتاب سوم در بارهٔ مثلثات مسطحه و کروی است و شامل جدولهای مفصل مثلثاتی است. بیرونی با تنظیم این جدولها و ضمن تعیین نه‌ضلعی منتظم به معادلهٔ درجه سوم $x^3+1=3x$ میرسد که جواب آنرا با کمک تقریبات متوالی بدست میآورد. کتابهای چهارم تا یازدهم به مسائل مختلفی از نجوم و جغرافیای ریاضی مربوط است.

بیرونی کتاب ساده و عامه فهمی دربارهٔ ریاضیات و نجوم دارد بنام «کتابی دربارهٔ مقدمات هنر ستاره شماری»* و رساله بیرونی دربارهٔ «تعیین وتر در دایره»** به اثبات قضایای مختلفی از هندسه اختصاص دارد که برای نتیجه‌گیریهای قوانین مثلثاتی مورد استناد قرارمیگیرد. بیرونی در «رساله درراستیکات هند» به قانون ۵، ۷ و غیرهٔ کمیتها به کمک نظریهٔ نسبتهای ترکیبی استناد کرده و آنرا برای هر عدد دلخواه تعمیم میدهد. این رساله از اینجهت جالب توجه است که اولین نمونهٔ تلفیق قوانین تجربی هندیها با کمک «مقدمات» اقلیدس و آثار تفسیرنویسان آنست. «طرح بروج روی صفحه و تصویر بر صفحه کره» مربوط به نظریه تصویر استره‌ئوگرافی و تعمیم آنست. مطالب این رساله در آخرین فصل کتاب مشهور تاریخی بیرونی بنام «آثارالباقیه عن‌القرون‌الخالیه» نیز شرح داده شده است.

بیرونی در بحث و جدل با ابن‌سینا از نظریه اتمی فضا که بوسیلهٔ ارسطو رد شده بود دفاع می‌کند. بیرونی دارای رساله‌های بسیاری دربارهٔ نجوم، معدن‌شناسی، داروشناسی و سایر علوم میباشد.

درهمین دوره طبیب وفیلسوف بزرگ قرون وسطی **ابوعلی‌حسین‌ابن‌سینا** (متولد در بخارا) زندگی میکرد (۹۷۰-۱۰۳۷ میلادی) که در اروپا بنام Avicene مشهور شده است. ابن‌سینا مدافع فلسفهٔ ارسطو و شاگرد مکتب

---

*) التفهیم لاوائل‌صناعة‌التنجیم.

**) استخراج اوتارفی‌الدائرة بخواص‌الخط‌المنحنی فیها.

فارابی بود. کتاب نهم تا دوازدهم رساله عمومی ابن‌سینا به‌نام«شفا» به ریاضیات اختصاص دارد. این‌کتابها عبارتند از «خلاصهٔ اقلیدس»، «خلاصهٔ مجسطی»، «علم اعداد» و «علم موسیقی». «خلاصه اقلیدس» شامل شرح مختصری از «مقدمات» اقلیدس باضافه بعضی مطالب جدید میباشد. در «خلاصهٔ مجسطی» هم ده مطلب جدید مربوط بهندسه اضافه شده است. «علم اعداد» خلاصه‌ای ازکتاب «مقدمه‌ای در حساب» نیکوماک است (قرن اول میلادی)، بین آنچه که ابن‌سینا اضافه کرد بایستی از طریق امتحان جذر به کمک عدد ۹ را یادآوری کرد. «علم موسیقی» دراساس عبارتست از طرح سؤالاتی که در «کتاب بزرگ موسیقی» تألیف فارابی آمده است ولی در اینجا هم مطالب تازه‌ای اضافه شده است.

ابن‌سینا تألیفات زیادی هم در زمینه طب، فلسفه و علوم طبیعی دارد و به عنوان شاعرهم شهرت داشت.

درتاریخ ریاضی سده‌های ۱۱و۱۲ و شایدهم بتوان گفت درتمام سده‌های میانه **حکیم عمرخیام** (۱۰۴۸-۱۱۳۱) متولد در نیشابور خراسان نقش عمده‌ای داشته است. خیام بیش از همه بعنوان یک شاعر معروف است، «رباعیات» خیام افکار مذهبی را مسخره می‌کند و شادیهای زندگی را تشویق و ترغیب می‌کند. بسیاری از اشعار خیام اختصاص به افکار فلسفی دارد:

گیرم که باسرار معما نرسی — در شیوهٔ عاقلان دانا نرسی
از سبزه و می‌خیز بهشتی برساز — کانجا به بهشت یا رسی یا نرسی

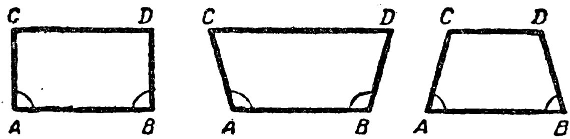
خیام در سال ۱۰۷۴ بدربار ملکشاه سلجوقی دعوت شد و رهبری رصدخانهٔ اصفهان را بعهده گرفت. آنجا تحت رهبری خیام مطالعاتی در بارهٔ اصلاح‌تقویم آفتابی قبل شروع کردند. دربارهٔ این تقویم اختلاف‌نظرهای زیادی وجود داشت، بعضی معتقد بودند که در هر ۳۳ سال ۸ سال کبیسه وجود دارد. در چنین وضعی تقویم خیام دقیق‌تر از تقویم گریگوری بود (در تقویم خیام در هر ۵۰۰۰ سال یکروز اشتباه وجود دارد و در تقویم گریگوری در هر ۳۳۰۰ سال‌یکروز). ولی این مطلب مهم است که خیام در زمان وجود رصدخانهٔ اصفهان نتوانست به نتایج معینی برسد (رصدخانه در ۱۰۹۲ با مرگ سلطان بسته شد) و تنها در آستانهٔ کشف تقویم جالب توجه و فوق‌العاده خود بود. خیام در رصدخانهٔ اصفهان و با کمک مشاهده، «جدول زیج ملکشاهی» را تنظیم‌کرد.

خیام سه رساله ریاضی نوشت: «مسائل حساب»، «درباره اثبات مسائل جبر و مقابله» و «شرح ماالشکل من مصادرات اقلیدس» (نامگذاری اخیر روشن می‌کند که تقریباً هریک از ۱۳ کتاب «مقدمات» اقلیدس تشکیل شده است از «مقدمات» یعنی تعاریف و اصول و «احکام» یعنی قضایا و مسائل.) خیام «مقدمات» را در کتابهای اول و پنجم و ششم اقلیدس مورد بحث قرار می‌دهد رسالهٔ خطی مربوط بحساب خیام تا کنون کشف نشده است ولی خیام در کتاب جبر خود از آن اطلاع میدهد و معلوم میشود که در آن طریقه هندی استخراج ریشه دوم و سوم برای هر ریشهٔ دلخواهی تعمیم داده شده است. ظاهراً طریقهٔ هندی ریشه گرفتن همان نوع استخراج جذر و کعب است که در رسالهٔ نسوی بنام «کفایت‌الحساب هندی» آورده شده است. محتوی این رساله خیام در رساله‌های نصیرالدین طوسی و غیاث‌الدین کاشانی حفظ شده است که در آنها طریقه ریشه‌گرفتن از اعداد صحیح را شبیه طریقه «روفینی ــ هورن»شرح میدهد.

در رساله جبر خیام، جبر بعنوان یک علم مستقل معرفی شده است. خیام علاوه بر اعداد، کمیتهای متصل را موضوع جبر قرارمیدهد، ولی تنها به ضرایب و ریشه‌های مثبت معادلات توجه دارد. خیام از معادلات خطی، درجه دوم و درجه سوم هم شش نوعی را که خوارزمی مطرح کرده بود مورد بحث قرار میدهد و هم ۱۹ نوع دیگرمعادلات درجه سوم. خیام حل این معادلات را با کمک تقاطع دایره با هذلولی و سهمی انجام میدهد. قبل از خیام هم ارشمیدس، ابوالوفا و ابن‌الحسن و کوهی معادلات درجه‌سوم را از همین راه حل میکردند ولی فقط خیام بود که راه حل متقاطع هندسی را بطور وسیعی دربارهٔ معادلات درجه سوم بکار برد که نتیجه آن طرح مسائل متنوع و زیادی در هندسه است. خیام در بسیاری از حالتها دو ریشه مختلف را کشف می‌کند ولی بحالت سه ریشه توجه نمی‌کند. خیام مطلب مربوط به حدود ریشه‌ها را مورد بررسی قرار میدهد و نظریه عمومی تحلیل معادلات عددی را مورد استفاده قرار میدهد.

اولین قسمت رساله هندسی خیام بنام «شرح ماالشکل . . .» به نظریه خطوط موازی اختصاص دارد. خیام اثبات اصل موضوع پنجم را که بوسیلهٔ ابن هیثم انجام گرفته است مورد انتقاد قرار میدهد، از اینجهت که در این اثبات از حرکت استفاده شده است. خود خیام اثبات دیگری میدهد که براساس اصل

موضوع دیگری است و آنرا منسوب به ارسطو میدانند، خیام برای اثبات، یک چهارضلعی در نظر میگیرد که دو زاویه مجاور بقاعدهٔ آن قائمه باشد و دو ضلع پهلوی قاعده با هم مساوی باشند و برای زوایای بالا سه حالت در نظـــر میگیرد و با توجه به اصل موضوعی که در نظر گرفته است، آنها را به تناقض می‌کشاند. خیام با اثبات بطریق برهان خلف که دو زاویه بالای چهار ضلعی نــه حاده و نه منفرجه‌اند در حقیقت اولین قضایـــای هندسهٔ غیراقلیدسی را اثبات میکند، زیـــرا «فرض زاویه حـاده» در هندسهٔ لباچوسکـــی و «فرض زاویـــه منفرجه» در هندسهٔ ریمان وجود دارد (این فرض در روی کره معمولی هم وجود دارد، بشرطی کـه اضلاع چهارضلعی را قوسهائی از دوایر عظیمه کره در نظـــر بگیریـــم). چهار- ضلعی کـه خیام مورد مطالعه قـــرار داده است به «چهارضلعـــی ساکری» مشهور است (بنام ریـاضی‌دان مشهور ایتالیائی در قرن هجدهم که همین چهارضلعـــی را با همین سه فرض مورد مطالعه قرار داده است) (شکل ۲۲).



شکل ۲۲

باید متذکر شد، که ساکری ضمن صحبت از این چهار ضلعی بـــه طوسی اشاره میکند که دربارهٔ رساله هندسی خیام به بحث پرداخته و بدون تردید تحت تأثیر خیام همین سه فرض را در چهارضلعی مورد مطالعه قرار میدهد.

قسمت دوم رساله هندسی خیام بـــه نظریـــه نسبتها اختصاص دارد. خیام تعریف تساوی نسبتهای مقادیر متصل را که بوسیلهٔ اقلیدس داده شده بود عـــوض می‌کند (اگرچه این تعریف را صحیـــح میدانـــد، ولی اصل مطلب بنظـــر او مبهم است) خیام تعریف کسر بزرگـــتر را در همین قسمت میدهد و هم‌ارز بودن قضیهٔ اقلیدس را با نظریه‌ای که خـــود بیان کـــرده است، ثابـــت می‌کند. ضمناً وجود چهارمین جزء تناسب را با معلوم بودن سه جـــزء آن ثابـــت میکند (اقلیدس در حالت کلـــی این مطلب را قبول نداشت). خیام ایـــن اثبات را بـــا کمک اصل

مربوط بـه اتصال انجام میدهد که بوسیلهٔ ارسطو تنظیم شده است! «هـر کمیتی میتواند به بی‌نهایت جـزء تقسیم شود یعنی آنهـا از اجـزاء غیر قابـل تقسیم تشکیل نشده‌اند».

قسمت سوم رسالهٔ خیام بـه نظریـهٔ نسبتهای ترکیبی تخصیص داده شده است که در نجوم مورد استعمال دارد. خیام برای اینکه تشکیل نسبتها را بعنوان ضرب مورد مطالعه قرار دهد، تعمیم مفهوم عـدد را پیشنهاد می‌کند و هـر کمیت متصلی را بعنوان عدد در نظـر میگیرد. این یک قـدم اساسی در توسعهٔ مفهوم عدد بود؛ قبل از آن زیر نام عدد تنها اعداد صحیح و گاهی کسری را می‌فهمیدند، ولی خیام این مفهوم را تا عدد مثبت و حقیقی تعمیم داد. خیام تحت تأثیر اعـداد جدیدی که خود وارد کرده بود بعدد جدیدی پی برد که میشد بـا ضرب عـوامل تقریبی حقیقی دریکدیگر با هر تقریب دلخواه بدست‌آورد. این مفروضات‌نظری برای محاسبه ریشه‌های‌معادلات جبری و کمیتهای مثلثاتی‌مورد استفاده‌قرارگرفتند.

بـاین ترتیب در سده‌های ۱۱ و ۱۲ ریاضی‌دانهای شرق میانه و نزدیک ازریاضیات هندی در زمینه‌های مثلثات، جبر محاسبات فنی و تکنیکی‌جلو افتادند، ضمناً آنها در بکار بردن علائم جبری، اعداد منفی و همچنین بکار بردن روشهای عمومی در حل معادلات از مکتب هندی پیروی نمی‌کردند. در این دوره روشهای محاسبه‌ای تکمیل شد، طریقـهٔ جـذر و کعـب گرفتن تعمیم داده شد، بسیاری از سؤالات مربـوط بهندسه وارد جبر شد، حل هندسی همهٔ انـواع معادلات درجـه دوم (که ریشه‌های مثبت دارند) بطریق هندسی پیشنهاد شد و جداول مثلثاتی بـا دقت زیاد تنظیم گردید.

درهمین زمان بحث دربـارهٔ «مقدمات» اقلیدس منجر به توسعهٔ مفهوم عدد تا عدد حقیقی مثبت شد وکشفیات اساسی‌هندسه درنظریه خطوط موازی‌انجام شد.

۳ـ سده‌های ۱۳ تا ۱۵

بزرگترین ریاضی‌دان سدهٔ سیزدهم **خواجه نصیرالدین‌طوسی** (متولـد در طوس‌ـخـراسان) (۱۲۰۱ـ۱۲۷۴ میـلادی) در مراغـه در جنوب آذربایجان نزدیک تبریز رصدخانـه بزرگی تأسیس کرد که در آنجا بزرگتریـن دانشمندان کشورهائیکه بوسیلهٔ مغولان اشغال شده بود جمع شدند. نتیجه مطالعاتی کـه در

این رصدخانه انجام گرفت، تنظیم «زیج ایلخانی» بود. در اینجا تحت نظارت طوسی تقریباً همهٔ آثار کلاسیک ریاضی یونانی بعربی ترجمه شد و یک رشته رساله ازخود خواجه نصیرالدین دربارهٔ ریاضیات، نجوم، فیزیک، فلسفه، منطق و سایر علوم منتشر شد. طوسی از رسالهٔ هندسه خیام اطلاع داشت و حواشی هم بر آن نوشت.

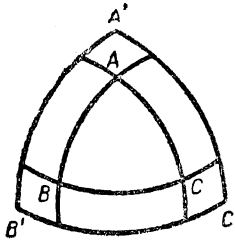
مهمترین آثار ریاضی طوسی عبارتند از: «شرح اقلیدس»، «کشف القناع فی اسرار شکل القطاع» «شرح کتاب کره و استوانهٔ ارشمیدس» و «مجموعه‌ای دربارهٔ حساب با کمک تخته و شن».

«شرح اقلیدس» در حقیقت شرح «مقدمات» اقلیدس باضافه مطالب جدیدی است که خود طوسی اضافه کرده است. دو نمونه از «شرح» بما رسیده است اولی از ۱۵ کتاب تشکیل شده است که خیلی نزدیک به متن اقلیدسی است، دومی از ۱۳ کتاب تنظیم شده است که در آنجا متن «اقلیدس» بطور اساسی مورد تجدید نظر قرار گرفته است. از اضافات طوسی در رسالهٔ دوم تعریف کمیتهای متصل است که به تعریف ارسطو خیلی نزدیک است: طوسی در هر دو رساله همان دو مسئله‌ای را که مورد توجه خاص خیام قرار گرفته بود، یعنی نظریه خطوط موازی و نظریهٔ تشکیل نسبتها، مورد بررسی قرار داده است. بخصوص در نظریه خطوط موازی، طوسی همان چهارضلعی خیام را با همان سه فرض او مورد مطالعه قرار میدهد و در حالیکه دو فرض اول را به تناقض می‌کشاند یک رشته قضایای هندسهٔ غیراقلیدسی را ثابت می‌کند. برای این اثبات او از اصلی استفاده می‌کند که به اصل مورد استفاده خیام خیلی نزدیک است.

«رسالهٔ کشف القناع» طوسی اولین دورهٔ منظم مثلثات است، تا آنزمان مثلثات را درکتابهای نجوم شرح میدادند. رساله از پنج کتاب تشکیل شده است. در اولین کتاب نظریهٔ تشکیل نسبتها که مورد احتیاج مثلثات است، مورد مطالعه قرار گرفته است، طوسی در این کتاب نظریات خیام را دربارهٔ توسعهٔ مفهوم عدد در مقادیر اتصالی تکمیل میکند. کتاب دوم به قضیه منلائوس و حالتهای خاص مختلف آن اختصاص دارد. درکتاب سوم مثلثات مسطحه بررسی شده است و کتاب چهارم به قضیهٔ منلائوس روی کره اختصاص دارد. در کتاب پنجم مثلثات کروی شرح داده است، در این کتاب قضایای هندسهٔ کروی که قبل از طوسی

اثبات شده بود شرح داده میشود و برای نخستین‌بار هر شش حالت حل مثلث کروی وقتی که سه جزء آن معلوم است مطرح شده است. جالب‌ترین موضوع این کتاب تعیین اضلاع مثلث کروی است، وقتی که زوایای آن معلوم باشد، مسئله‌ای که در هندسه مسطحه نمونه‌ای ندارد. طوسی برای حل این مسئله مفهوم مثلث قطبی را وارد میکند. دو نقطه از کره را قطبهای دایرهٔ عظیمه‌ای از این کره مینامیم وقتی که این دو نقطه همان وضع قطبهای کره زمین را نسبت بخط استوا داشته باشند، در اینصورت مثلثی را قطبی مثلث مفروض‌گوئیم، وقتی که رئوس آن قطبهای اضلاع مثلث مفروض باشند. طوسی رابطهٔ بین اضلاع و زوایای دو مثلثی که متقابلا قطبی یکدیگر پیدا میکند، باین ترتیب اضلاع مثلثی که قطبی مثلث ABC است (شکل ۲۳) برابر است با:

$$(\pi - A) \quad و \quad r(\pi - B) \quad و \quad r(\pi - C)$$



شکل ۲۳

بکمک این مطلب، مسئلهٔ تعیین اضلاع مثلث کروی از روی زوایای آن منجر بحل مسئلهٔ قبل یعنی تعیین زوایای مثلث کروی از روی اضلاع آن میشود.

در بحثی که طوسی دربارهٔ رسالهٔ ارشمیدس «دربارهٔ کره و استوانه» انجام داده توجه اصلی خود را به اثبات چهار اصل اول ارشمیدس دربارهٔ مقایسه خطوط منحنی و سطوح منحنی معطوف داشته است. در حقیقت، طوسی اصول ارشمیدس را با یک تعریف جدید عوض میکند که طبق آن خط از اجزاء خطی تشکیل شده است که دو انتهای هر یک از آنها دو نقطه بی نهایت نزدیک بهم میباشند. این نقطه نظر، بهمان اندازه که به طرفداران نظریهٔ اتمی

قدیم نزدیک است، به کاشفین حساب دیفرانسیل و انتگرال در اروپای غربی هم نزدیک میباشد. طوسی با تکیه باین تعریف، اصول ارشمیدس را بطریق زیر ثابت میکند: برای اثبات اینکه از دو خط منحنی محدب واقع بر یک صفحه که دارای دو انتهای مشترک هستند، خط منحنی داخلی کوچکتر از بیرونی است، ابتدا آنرا برای خطوط شکسته‌ای که از وترهای این دو خط منحنی بوجود آمده ثابت میکند و سپس آنرا برای خطوط منحنی تعمیم میدهد، زیرا خط منحنی جز یک خط شکسته که تعداد اضلاع آن بی‌نهایت است چیز دیگری نیست. در اینجا بیش از خود اثبات اصول ارشمیدس، فکر و نحوهٔ اثبات آن ارزش دارد. روشن است که این «اتمی بودن ریاضی» که برای این اثبات مورد استفاده قرار گرفته، نمیتوانست بهدف برسد. ازاین‌قبیل‌افکارمیشد برای توسعهٔ ریاضی استفاده کرد، همانطور که ریاضی‌دانان اروپائی بعداً اینکار را کردند. ولی طوسی بمسائل جدیدی از این نوع نپرداخت و تنها نظر خود را به اساس منطقی هندسه متوجه کرد. در بحثی که طوسی دربارهٔ کتاب «کره و استوانه» ارشمیدس میکند، به نظریه نسبتها هم تکامل بیشتری میدهد و بخصوص نظریهٔ نسبتهای نامساوی را توسعه میدهد. و طوسی در ابتدای اثر خودش ۱۱ قضیه دربارهٔ نسبتهای نامساوی ثابت میکند تا بکمک آن بمطالب ارشمیدس استحکام منطقی بدهد. طوسی با کمک این قضایا توابع

$$y=x(a-x)^{۲} \quad \text{و} \quad y=x(a-x)$$

را مطالعه میکند و اکسترممهای (ماکزیمم و می‌نیمم) آنها را پیدا میکند. این توابع به طوسی امکان داد که بتواند در کره روابط بغرنج‌تری را که بنظر ارشمیدس نرسیده بود مورد مطالعه قرار دهد.

طوسی در بحثی که دربارهٔ ارشمیدس میکند بطور وسیعی از مفهوم حرکت استفاده کرده است و چه آنجا که ارشمیدس از حرکت استفاده کرده است و چه آنجا که استفاده نکرده است، طوسی امکان مقایسهٔ خطوط مستقیم و خطوط منحنی، سطوح مستوی و منحنی را با کمک حرکت نشان میدهد، ضمناً طوسی خطوط منحنی ومستقیم را مجموعه‌ای ازقطعات کوچک غیرقابل تقسیم میداند که میتوانند با هم مقایسه شوند و وسیله‌ای باشند که بتوان باکمک آنها خط منحنی

را برخط مستقیم قرار داد.

«مجموعهٔ حساب با کمک تخته و شن» طوسی اختصاص به محاسبات عددی با کمک ارقام هندی دارد. محتوی رساله خیلی نزدیک به رسالهٔ نسوی است، با این تفاوت که طوسی طریقهٔ ریشه گرفتن را با هر تقریب دلخواه میدهد، ولی مثل نسوی روش «روفینی ــ هرون» را بکار میبرد. اینجا هم از قانون «بینم نیوتون» استفاده میکند. طوسی نمینویسد که این قوانین را از کجا گرفته است، ولی بنظر میرسد که آنها را از «مسائل حساب» خیام گرفته باشد.

در سدهٔ چهاردهم کشورهای شرق میانه و نزدیک دوباره با هجوم تیمور ویران شدند، ولی در ابتدای قرن پانزدهم نوهٔ تیمور، الغ بیک، علما را تحت حمایت خود گرفت و مرکز جدید علمی در پایتخت خود سمرقند بوجود آورد. در این شهر بزرگترین رصدخانه شرق میانه ساخته شد که تحت نظر دانشمند ایرانی **غیاث‌الدین جمشید کاشانی** کار میکرد (متولد شده در شمال ایران ــ مرگ در ۱۴۳۶ میلادی) کاشانی قبل از ورود به سمرقند «زیج خاقانی» را تنظیم کرده بود که میتوان آنها را تکمیل شده «زیج ایلخانی» طوسی دانست. کاشانی همراه با تنظیم جداول مثلثاتی، «رسالهٔ درباره وتر و سینوس» را نوشت. «رسالهٔ دربارهٔ دایره» مستقیماً به مسائل نجومی مربوط است. کاشانی در سمرقند دایرةالمعارف ریاضی خود را بنام «مفتاح‌الحساب» نوشت و در تنظیم «جداول جدید نجومی گورکانی» که در اثر مشاهدهٔ رصدخانه سمرقند بدست آمده بود شرکت نمود. کاشانی دارای یک رشته رسالات اختصاصی مربوط به نجوم است.

«مفتاح‌الحساب» کاشانی مرکب از ۵ کتاب است. کتاب اول به حساب مربوط به اعداد صحیح اختصاص دارد. محتوی این کتاب خیلی به رساله حساب طوسی شباهت دارد و ضمناً شامل جذر گرفتن از هرعدد صحیح است. برخلاف نسوی و طوسی، کاشانی عملیات را روی کاغذ انجام میدهد نه روی تخته و با کمک شن. کتاب دوم اختصاص به حساب مربوط به کسرها دارد. در این کتاب کاشانی کسرهای اعشاری را وارد می‌کند وخواص آنهارا شبیه کسرهای شصت‌ــ شصتی که منجمین بوسیله دقیقه، ثانیه، ثالثه، رابعه و غیره بکار میبردند، معین میکند. کسرهای اعشاری برای دقیق کردن جذر اعداد هم بکار برده میشود.

کتاب سوم به «محاسبات منجمین» یعنی به اعمال حساب مربوط به اعداد صحیح و کسری در دستگاه شصت شصتی اختصاص دارد. در کتاب چهارم اندازه اشکال مسطحه مورد مطالعه قرار گرفته است: دایره و قسمتهای آن، منشور، استوانه، هرم، مخروط، کره چند وجهی‌های منتظم و بعضی از چند وجهی‌های نیمه منتظم. کاشانی برای مطالعه مثلثها از مثلثات و جدولهای مثلثاتی که از «زیج ایلخانی» طوسی اقتباس شده بود، استفاده میکند.

کاشانی برای مطالعه دایره و اجسام کروی از مقدار تقریبی عدد π استفاده میکند و آنرا مساوی ۳ «درجه» ۸ «دقیقه»، ۲۹ «ثانیه» و ۴۴ «ثالثه» یعنی ۳/۱۴۱۵۹۳ میگیرد. بعداً دربارهٔ حجم اجسام از روی وزن آنها صحبت میکند که منجر به تنظیم جدول وزن مخصوص از اجسام جامد و مایع میشود، بخصوص روش اندازه‌گیری طاقها و گنبدها که بطور وسیعی در معماری مشرق‌زمین بکار میرود مورد مطالعه قرار گرفته است. کاشانی برای اندازه‌گیری گنبدهای مجوف از طریقهٔ جمع بندی تقریبی استفاده میکند. کتاب پنجم به جبر اختصاص دارد. کاشانی نتایجی را که قبل از او دربارهٔ حل معادلات درجه سوم بدست آمده بود، تنظیم و راه حل هندسی آنها را بدست میدهد و از رسالهٔ مشابهی صحبت می‌کند که در آن دربارهٔ معادلات درجه چهارم صحبت کرده است، ولی این رساله بما نرسیده است. کاشانی بعداً حل معادلات خطی را مطرح میکند و یک رشته قواعد برای جمع‌زدن رشته‌های عددی و همچنین قواعدی برای نسبتها، چه در مورد اعداد و چه در مورد مقادیر متصل، بدست میآورد. در آخر کتاب تعداد زیادی مسئله طرح میکند.

«رسالهٔ دربارهٔ دایره» (رسالة المحیطیه) کاشانی به محاسبهٔ نسبت طول محیط دایره به قطر آن با حداکثر دقت لازم اختصاص دارد. کاشانی محیط دایره را واسطهٔ عددی محیطهای چند ضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی با 3×2^n ضلع میگیرد، ضمناً میگوید n را بایستی چنان گرفت که اگر شعاع دایره مساوی فاصلهٔ زمین تا ستاره‌های ثابت باشد (که بحساب کاشانی ۶۰۰۰۰۰ برابر شعاع کرهٔ زمین است)، اختلاف بین محیطهای چند ضلعی‌های داخلی و خارجی کمتر از قطر موی اسب شود. کاشانی برای این منظور n را مساوی ۲۸ میداند یعنی: $3 \times 2^n = 805306368$ و کاشانی واسطهٔ عددی مذکور را با دقت فوق‌

العاده‌ای حساب میکند، که اگر شعاع دایره را مساوی واحد بگیریم نسبت محیط دایره به قطر آن خواهد شد:

$$\text{۳}^{\circ}\text{۸}' , \text{۲۹}'' , \text{۴۴}''' , \text{۰}^{IV} , \text{۴۷}^{V} , \text{۲۵}^{VI} , \text{۵۳}^{VII} , \text{۷}^{VIII} , \text{۲۵}^{IX} \#\text{۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۵}\#$$

از ۱۷ رقمی که کاشانی برای عدد π پیدا کرده است، تنها رقم آخری آن درست نیست.

«رسالهٔ دربارهٔ وتر و سینوس» بما نرسیده است، ولی ما مهمترین قسمتهای آنرا از روی نوشتهٔ دانشمند سمرقند **قاضی‌زادهٔ رومی** بنام «رساله دربارهٔ سینوس یک درجه» شرح میدهیم. رساله‌های کاشانی و رومی به محاسبهٔ $sin\text{۱}^{\circ}$ از روی مقدار $sin\text{۳}^{\circ}$ اختصاص دارد. مجهول $sin\text{۱}^{\circ}$ ریشه معادلهٔ درجه سوم

$$\text{۳}x - \text{۴}x^{\text{۳}} = sin\text{۳}^{\circ}$$

میباشد. کاشانی این معادله را با سادگی و ظرافت فوق العاده‌ای حل میکند و و چنین بدست میآورد:

$$sin\text{۱}^{\circ} = \text{۰/۰۱۷۴۵۲۴۰۶۴۳۷۲۸۳۵۷۱}$$

بعد از کشته شدن الغ بیک **علاءالدین علی قوشچی** ریاضی‌دان اهل سمرقند به اسلامبول رفت و نوشته‌های با ارزشی از مکتب الغ بیک را بهمراه خود برد. در اسلامبول کتاب «محمدیه» را به سلطان محمد تقدیم کرد. در این کتاب که بر مبنای «مفتاح الحساب» کاشانی نوشته شده، برای اولین بار اصطلاحات «منفی» و «مثبت» بکار رفته است، ولی این منفی و مثبت بودن هنوز مربوط به اعداد نیست و بلکه مربوط به مقادیر جمع شونده و یا کم‌شونده است.

بعد از قتل الغ بیک (که بوسیلهٔ روحانیون ارتجاعی ترتیب داده شده بود) کشفیات ریاضی در شرق میانه و نزدیک رو به نابودی رفت. در این زمان ریاضیات دیگر محدود به وسیله‌ای برای تحصیل شده بود، معهذا بعضی از آثار این زمان مثل «خلاصة الحساب» تألیف ریاضی‌دان قرن شانزدهم **بهاءالدین آملی**

(شیخ بهائی) به اندازهٔ کافی شهرت پیدا کردند.

***

باین ترتیب در سده‌های ۱۳ تا ۱۵ ریاضی‌دانهای کشورهای شرق میانه و نزدیک در زمینهٔ محاسبات ریاضی به موفقیتهای زیادی رسیدند: محاسبهٔ جداول مثلثاتی، حل مثلثهای کروی، محاسبهٔ ریشه‌های معادلات جبری، محاسبهٔ عدد π، (که با محاسبات تقریبی هم بصورت کسرهای شصت شصتی و هم بصورت کسرهای دهدهی نمایش داده میشد). اعمال مربوط به محاسبه، نظریهٔ تشکیل نسبتها را قوام داده و مفهوم عدد را دربارهٔ کمیتهای متصل توسعه بخشید.

آثاری اصیل و یا ترجمه‌ای ریاضی‌دانان و منجمین شرق میانه و نزدیک تأثیر فوق‌العاده‌ای در پیشرفت فرهنگ و علم کشورهای اروپائی از سدهٔ دوازدهم به بعد داشته است.

در سدهٔ دوازدهم رساله‌های حساب و جبر خوارزمی به لاتینی ترجمه شد. در جریان مبارزه «آلگوریستها» با نمایندگان حساب قدیمی رومی، بالاخره عددنویسی موضعی و «ارقام هندسی» ۱، ۲ . . . . ۹ ، ۰ در اروپای غربی مورد قبول قرار گرفت و بنام «ارقام عربی» نامیده شد. شکل لاتینی اسم‌الخوارزمی (Algorithmus) ابتدا به نوع محاسبهٔ با دستگاه عددنویسی موضعی اعشاری اطلاق میشد ولی بعدها (از زمان لایب نیتز) به هر جریان محاسبه‌ای منظم آلگوریتم گفتند. ابتدا نام رسالهٔ خوارزمی «الجبر والمقابله» و سپس تنها نام «الجبر» بشکل Algebre روی این علم گذاشته شد. تقریباً در همین زمان آثار فارابی، ابوکامل، ابن‌هیثم و ابن‌سینا نیز ترجمه شد. در سدهٔ دوازدهم «مقدمات» اقلیدس، «مجسطی» بطلمیوس، آثار ارشمیدس، آپولونیوس و سایر دانشمندان یونان قدیم از عربی به لاتینی برگردانده شد. ترجمهٔ مستقیم این آثار از زبان یونانی در سده‌های ۱۵ و ۱۶ انجام گرفت. در این زمان در اسپانیا، ایتالیا و جنوب فرانسه مدارس کاملی به ترجمهٔ آثار عربی مشغول بودند.

اولین ریاضی‌دان بزرگ اروپای غربی **لئوناردو پیزفیبوناچی** (حدود ۱۱۷۰–۱۲۵۰) در تونس تحصیل میکرد. «کتاب آباک» فیبوناچی تحت تأثیر جدی ابوکامل نوشته شده و مسائل زیادی در جبر و حساب را از او تقلید کرده است. ریاضی‌دان بزرگ دیگر اروپای قرون وسطی **رژیومونتان**

Regiomontanus (۱۴۳۶–۱۴۷۶) مؤلف کتابی در مثلثات بنام «پنج کتاب دربارهٔ همهٔ انواع مثلثها» است که بطور وسیعی از آثار البتانی و طوسی استفاده کرده است.

در سدهٔ ۱۵ وقتی که قسطنطنیه بوسیلهٔ ترکها اشغال شد، تماس بین دانشمندان مشرق زمین و اروپا بیشتر شد. در این زمان دیگر جداول نجومی گورگانی و سایر آثار دانشمندان سمرقند که بزبانهای یونانی جدید لاتینی و آلمانی ترجمه شده بود، دراروپا پیدا میشد. ضمن این ترجمه‌ها باید اولین آثار جبری را هم نام برد که در آنها برای نخستین‌بار در اروپا اصطلاحات «مثبت» و «منفی» بکار رفته است، احتمال زیاد دارد که این اصطلاحات تحت تأثیر اصطلاحات قوشچی در اروپا به وجود آمده باشد، در همین زمان در اروپا بحثی که طوسی دربارهٔ اقلیدس کرده بود شناخته شد و اروپائیها با نظریات خیام و طوسی دربارهٔ تشکیل نسبتها و خطوط موازی آشنا شدند. ممکن است که اروپائیها ایدهٔ بی نهایت کوچکها را از بحثی که طوسی دربارهٔ ارشمیدس کرده است گرفته باشند. افکار خیام و طوسی و تعمیم مفهوم عدد و توسعه آن تا اعداد متصل خیلی بافکار **رنه دکارت** (۱۵۹۴–۱۶۵۰) نزدیک است که پاره‌خط هندسی را بعنوان اعدادی که بوسیلهٔ مقادیر متغیر شرح داده شده است مطالعه میکند. ما دربارهٔ آشنائی دکارت با آثار طوسی اطلاعی نداریم ولی **جان والیس** (۱۶۱۶–۱۶۶۳) با این آثار آشنا بود و در یکی از کارهای خود که به نظریهٔ خطوط موازی و نظریهٔ تشکیل نسبتها اختصاص دارد همان بحث و انتقاد طوسی را دربارهٔ این مطالب تکرار کرده است. **ساکری** با نظریهٔ خطوط موازی طوسی بوسیلهٔ والیس آشنا شد. ما قبلاً اشاره کردیم که نظریهٔ تشکیل نسبتها و نظریهٔ خطوط موازی منجر به دو کشف بزرگ در تاریخ ریاضی شد، ورود کمیتهای متغیر به ریاضیات و کشف هندسهٔ غیراقلیدسی.

در این زمان بسیاری از کشفیات کاشانی در اروپا شناخته نشده بود و دانشمندان اروپای غربی آنها را بعد از ۱۵۰ تا ۲۰۰ سال از نو کشف کردند: رابطهٔ مربوط به توان صحیح دوجمله‌ای (بینم نیوتون) دوباره بوسیلهٔ **میکل‌شتیفل** در ۱۵۴۵ وکسرهای اعشاری بوسیلهٔ **سیمون‌ستون** در ۱۵۸۲ کشف شد، عدد π تا ۱۷ رقم اعشار دوباره بوسیلهٔ **آندریان وان رومن** در سال

۱۵۹۳ محاسبه شد.

در این مقاله کوشش کردیم پیشرفت ریاضیات را در کشورهای شرق میانه و نزدیک تا آنجا که اطلاعات امروزی ما اجازه میداد توضیح بدهیم. ولی بسیاری از آثار ریاضی‌دانان شرق میانه و نزدیک در قرون وسطی تا حالا مورد مطالعه قرارنگرفته و حتی نام بسیاری از نوشته‌های خطی مربوط بآنها در صورت کتابخانه‌ها و موزه‌ها قید نشده است. اگر بیاد بیاوریم که تنها در سالهای اخیر بود که بعضی از آثار خیام، طوسی و کاشانی توانست جوانب مختلفی از پیشرفت ریاضی را در کشورهای شرق میانه و نزدیک در قرون وسطی روشن کند، مسلماً پس از مدتی توضیحاتی که ما در اینجا داده‌ایم غیر کافی و نارسا بنظر خواهد رسید.

۷ نظریهٔ خیام در بارهٔ خطوط موازی

ب. آ. روزنفلد ـ آ. ب. یوشکویچ

الهام دهندهٔ هندسهٔ غیر اقلیدسی

یکی از مهمترین آثار خیام، کتاب او بنام «شرح ماا شکل من مصادرات کتاب اقلیدس» استکه به بحث در بارهٔ «مقدمات» **اقلیدس** اختصاص داده شده است.

«مقدمات» اقلیدس که برای نخستین بار در حدود سال ۸۰۰ میلادی به وسیلهٔ **الحجاج** بعربی ترجمه شد، در پیشرفت ریاضی در کشورهای اسلامی نقش اساسی داشت. تقریباً بلافاصله بعد از برگرداندن «مقدمات» بعربی بحث و انتقاد در بارهٔ آن شروع شد، بطوریکه تا زمان خیام میتوان لااقل از ۳۰ رسالهٔ عربی در این باره نام برد.

بخصوص اصول متعارفی و تعاریف کتاب اول و نظریهٔ خطوط موازی که بر مبنای اصل موضوع پنجم قرار داشت، و علاوه بر آن نظریهٔ نسبتها در کتاب پنجم، دقت بسیاری از محققین را بخود جلب کرد.

«شرح ماا شکل. . .» خیام شامل سه کتاب و یک مقدمه است:

در مقدمه، خیام از موضوع کتاب صحبت میکند و از بعضی از متقدمین خودنام میبرد. خیام برای آثار منطقی فلسفی **ارسطو** اهمیت بسزائی قائل است. او نه تنها آموزش ارسطو را در بارهٔ ساختمان و ترکیب علوم استقرائی و همچنین روش استدلال او را می‌پذیرد، بلکه درمورد یک رشته ازمسائل اختصاصی‌تر هم بدنبال دانشمند بزرگ یونان میرود.

کتاب اول «شرح ماشکل» به نظریهٔ توازی اختصاص دارد. البته خیام در حقانیت اصل موضوع اقلیدس شک نمیکند، ولـی آنرا از بسیـاری قضایا، که اقلیدس خود را ملزم به اثبات آنها دیده است، کمتر واضـح می بیند، مثلاً خیام اصل مـوضوع پنجم را از این قضیه کـه: «زوایای مرکزی مساوی، در دو دایره روبروی به کمانهای مساویاند.» بغرنج‌تر احساس میکند.

خیام کوششهائی را که بعضی افراد (مثل هرون و نیریزی) برای اثبات اصل موضوع اقلیدس انجام داده بودند، رد میکند و آنها را قانع کننده نمیداند. خیام استدلال «ابن‌هیثم» را هم رد میکند، استدلال ابن‌هیثم بر این اساس بنا شده است که: اگـر پاره‌خطی بر خط مفروضی عمود باشد، وقتی که انتهای پائین آن روی خط حرکت کند، انتهای بالای آن یک خط راست رسم خواهد کـرد، ابن هیثم در کتاب خودش بنام «بحث دربارهٔ کـتاب مقدمات اقلیدس» سعی میکند که قضیه را بـا کمک بعضی فرضیات مبهم، که دربارهٔ خواص حـرکت مستقیم‌الخط یکنواخت میکند، باثبات برساند. خیام اساساً با روش کار و نظر ابن هیثم موافق نیست، زیرا او به پیروی از ارسطو «تعـاریفی از این قبیل کـه مکان حـرکت را معلوم میکند» از هندسه حذف میکند.

از نظر خیام، اشتباه دانشمندان سابق در این بود کـه «مبادی، مأخـوذ از فلاسفه را در نظر نمی‌گرفتند»* و منظور خیام از ایـن مبادی، مبادی فلسفهٔ ارسطو است. یکی از مبادی، که خیام آنرا بعنوان اصل بدیهی برای نظریهٔ خطوط موازی قبول میکند (و تا آنجا کـه از آثار شناخته شدهٔ ارسطو معلوم است، مربـوط به ارسطو نیست) اینست که: «دو خطی کـه بهم نزدیک میشوند، یکدیگررا قطع میکنند، و برای دو خطی کـه از هم دور میشوند، در طرفی کـه فاصلهٔ آنها زیاد میشود، نقطهٔ تلاقی وجود ندارد».**

محتوی هریک از این دو مطلبی که در اصل «ارسطو-خیام» وجود دارد

---

*) «و اما سبب غلط المتاخرین فی برهان هذالمقدمه فغفلتهم عن‌المبادی الماخوذه من‌الحکم...»

**) «... و منها ان کل خطین مستقیمین متقاطعین و انهما الی الانفراخ والاتساع فی بعدهما عن زاویه‌التقاطع ومنها ان‌الخطین‌المستقیمین‌المتضایقین فهما متقاطعان ولایجوران یتسع‌خطان متضایقان فی‌مرور هما الی‌التضایق...»

معادل با اصل موضوع پنجم اقلیدس است.

بدون اینکه وارد بحث مفصل در مطالب بعدی شویم (که بدون ایراد هم نیستند) آنها را بطور کلی مورد توجه قرار میدهیم:

خیام با کمک این اصل جدید، همهٔ قضایائی را که مستقیماً از اصل موضوع پنجم اقلیدس بدست میآیند، ثابت میکند. در اینجا خطوط اساسی کارهای خیام به ابن‌هیثم نزدیک است. خیام بالاخره چهار ضلعی را که دارای سه زاویهٔ قائمه باشد مورد مطالعه قرار میدهد (چهار ضلعی سه قائمه) [این همان چهارضلعی است که در سدهٔ هیجدهم دوباره در نظریهٔ خطوط موازی لامبرت مورد مطالعه قرار میگیرد] و ثابت میکند که زاویهٔ چهارم این چهار ضلعی هم قائمه است. برای این منظور ثابت میشود که اضلاع چهار ضلعی دو بدو برابرند (هر ضلع که متصل به زاویهٔ چهارم است با ضلع روبروی آن). این مطلب از راه برهان خلف ثابت میشود، یعنی از این راه که فرض «زاویهٔ اول کوچکتر یا بزرگتر است از زاویه دوم» به تناقض کشانده میشود.

چهار ضلعی سه قائمه در مرکز توجه خیام قرار ندارد، بلکه او بیشتر به «چهار ضلعی دو قائمه متساوی‌الساقین» اهمیت میدهد (چهار ضلعی که دو زاویهٔ پهلوی قاعدهٔ آن قائمه بوده و دو ضلع پهلوی آن مساوی باشند). فکر مربوط به این چهار ضلعی ممکن است از ابن‌هیثم به خیام رسیده باشد ابن هیثم قضیه‌ای دارد که بر طبق آن: هر چهار ضلعی دو قائمهٔ متساوی‌الساقین بوسیلهٔ محورتقارن خود به دو چهار ضلعی سه قائمه تقسیم میشود. خیام ابتدا فرض میکند که دو زاویهٔ دیگر چهار ضلعی دو قائمه (که با هم برابرند) حاده باشند و سپس حالت منفرجه‌بودن آنها را مطرح میکند و در هر دو حالت فرض را با کمک اصل خودش به تناقض می‌کشاند. خیام پس‌از این اثبات، مثل ابن‌هیثم، بسادگی اصل موضوع اقلیدس را ثابت میکند.

تقریباً نیم قرن بعد **خواجه نصیرالدین طوسی** «رسالهٔ برطرف کردن شک دربارهٔ خطوط موازی» را نوشت (رونوشتی از این رساله در کتابخانهٔ ملی پاریس بشمارهٔ ۲۴۶۷/۶ وجود دارد)، که در آن نظریهٔ خطوط موازی خیام و **الجوهری** ریاضی‌دان سدهٔ نهم توضیح و انتقاد شده است و با استفاده از افکار آنها استدلال خاصی ذکر کرده است.

با این قسمت از رسالهٔ خواجه نصیرالدین طوسی، که در آن نظریهٔ خیام توضیح داده شده است، برای نخستین‌بار سمیت Smith اشاره کرد، در اینجاهم بخصوص فرضهای حاده یا منفرجه بودن دو زاویهٔ «چهار ضلعی دو قائمه‌متساوی‌الساقین» رد میشود. این اثبات در یک نسخه از «کتاب توضیح مقدمات‌اقلیدس» طوسی و با بعضی تغییرات در نمونهٔ دوم نسخه این کتاب آمده است. طوسی در یکی ازاین نسخه‌ها اصل «ارسطو ـ خیام» را با اصل دیگری شبیه‌بآن‌عوض میکند.

کارهای هندسه‌دانهای مشرق زمین دربارهٔ خطوط موازی، که قریب پانصد سال‌طول‌کشیدودقیقاً هم‌بهم ارتباط داشت، اهمیت زیادی برای‌کشفیات بعدی‌دراین زمینه داشت. ابن هیثم دراولین‌کوششی‌که دراروپای قرون‌وسطی بوسیلهٔ ریاضی‌دان یهودی **لوی‌بن‌گرشم** برای اثبات اصل موضوع پنجم انجام گرفت تأثیر جدی داشت، این ریاضی‌دان درنیمهٔ اول سدهٔ چهاردهم ودرجنوب فرانسه زندگی‌میکرد.

افکار خیام و طوسی در سدهٔ هفدهم در اروپا اهمیت خاصی کسب کرد. ارتباطی که این دو دانشمند بین اصل موضوع پنجم اقلیدس با مجموع زوایای یک چهارضلعی و یا معادل آن، مجموع زوایای یک مثلث، برقرار کردند؛ اساس کارهای بعدی قرار گرفت. همانطور که میدانیم **لامبرت** در اواسط سدهٔ هیجدهم در نظریهٔ خطوط موازی خود، چهار ضلعی سه قائمه را مورد مطالعه قرار میدهد، او هم مثل ابن هیثم برای زاویهٔ چهارم این چهار ضلعی فرضهای حاده و منفرجه‌بودن را پیش می‌کشد. کمی قبل از آن در نیمهٔ اول سدهٔ هیجدهم، **ساکری** اساس نظریهٔ خود را دربارهٔ خطوط موازی بر مطالعهٔ همان چهارضلعی دو قائمهٔ متساوی‌الساقین که خیام فرض کرده بود قرار میدهد و کوشش میکند که فرضهای حاده و منفرجه‌بودن دو زاویهٔ دیگر را رد کند.

قضایای جداگانهٔ هندسه‌دانهای مشرق زمین دربارهٔ خواص چهار ضلعی مورد مطالعهٔ آنها دربارهٔ فرضهای حاده و منفرجه‌بودن زوایا در حقیقت نخستین قضایای هندسه‌های غیراقلیدسی لباچوسکی و ریمن هستند (درهندسهٔ **لباچوسکی** فرض زوایای حاده و در هندسهٔ **ریمن** فرض زوایای منفرجه صدق میکند).

بدین ترتیب آثار ریاضی‌دانهای اسلامی دربارهٔ نظریهٔ خطوط موازی و بین آنها کوششهای خیام الهام دهندهٔ اصلی کشف هندسهٔ غیر اقلیدسی بوده است.

کتابهای شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

فلسفه

آلبر کامو (چاپ دوم)	نوشتهٔ کانر کروز اوبراین ترجمهٔ عزت‌الله فولادوند بها ۱۲۵ ریال
انقلاب یا اصلاح	گفتگو با هربرت مارکوزه و کارل پوپر بها ۷۵ ریال
تحلیل ذهن	نوشتهٔ برتراند راسل ترجمهٔ منوچهر بزرگمهر شمیز ۱۷۵ ریال زرکوب ۲۳۰ ریال
تیمائوس	نوشتهٔ افلاطون ترجمهٔ محمدحسن لطفی بها ۱۰۵ ریال
خدایگان و بنده	نوشتهٔ هگل ترجمهٔ دکتر حمید عنایت (زیر چاپ)
ژان پل سارتر	نوشتهٔ موریس کرنستن ترجمهٔ منوچهر بزرگمهر بها ۱۰۵ ریال
فانون	نوشتهٔ دیوید کات ترجمهٔ رضا براهنی بها ۱۳۵ ریال
فلسفهٔ تحلیل منطقی	نوشتهٔ منوچهر بزرگمهر بها ۱۰۵ ریال
کارناپ	نوشتهٔ آرن نائس ترجمهٔ منوچهر بزرگمهر (زیر چاپ)

مارکوزه	نوشتهٔ السدر مك‌اینتایر ترجمهٔ حمید عنایت بها ۱۲۵ ریال
مسائل فلسفه	نوشتهٔ برتراند راسل ترجمهٔ منوچهر بزرگمهر بها ۱۴۵ ریال
منطق سمبلیك	نوشتهٔ سوزان لنگر ترجمهٔ منوچهر بزرگمهر شمیز ۱۹۰ ریال، زرکوب ۲۵۰ ریال
ویتگنشتاین	نوشتهٔ یوستوس هارتناك ترجمهٔ منوچهر بزرگمهر بها ۱۰۵ ریال

دین

تاریخ طبیعی دین	نوشتهٔ دیوید هیوم ترجمهٔ دکتر حمید عنایت بها ۷۵ ریال

جامعه‌شناسی

ساختهای خانواده و خویشاوندی در ایران	نوشتهٔ دکتر جمشید بهنام بها ۹۵ ریال
مقدمه برجامعه شناسی ایران	نوشتهٔ دکتر شاپور راسخ و دکترجمشید بهنام زرکوب ۲۷۵ ریال

سیاست

امریکای لاتین «دنیای انقلاب» (چاپ دوم)	نوشتهٔ ك. بیلز ترجمهٔ و. ح. تبریزی بها ۱۵۵ ریال
انقلاب افریقا (چاپ سوم)	نوشتهٔ فرانتس فانون ترجمهٔ محمدامین کاردان بها ۱۴۵ ریال

ایالات نامتحد (چاپ دوم)	نوشتهٔ ولادیمیر پوزنر ترجمهٔ محمد قاضی بها ۱۶۵ ریال
جنگ ویتنام (چاپ دوم)	نوشتهٔ برتراند راسل ترجمهٔ صمد خیرخواه بها ۱۲۵ ریال
چهرهٔ استعمارگر، چهرهٔ استعمارزده (چاپ دوم)	نوشتهٔ آلبرممی ترجمهٔ هما ناطق بها ۱۰۵ ریال
درجبههٔ مقاومت فلسطین	نوشتهٔ روژه کودروا ــ فایض ا. سائق ترجمهٔ اسداله مبشری بها ۸۰ ریال
روزهای سیاه غنا	نوشتهٔ قوام نکرومه ترجمهٔ جواد پیمان بها ۱۳۵ ریال
سفری در گردباد	نوشتهٔ یوگنیا. س. گینزبرگ ترجمهٔ دکتر مهدی سمسار شمیز ۱۷۵ ریال زرکوب ۲۳۰ ریال
عرب و اسرائیل (چاپ سوم)	نوشتهٔ ماکسیم رودنسون ترجمهٔ دکتر رضا براهنی بها ۱۵۵ ریال
مسئلهٔ فلسطین	گزارش کنفرانس حقوقدانان عرب درالجزایر ترجمهٔ اسداله مبشری بها ۱۲۵ ریال
هیروشیما	نوشتهٔ جان هرسی ترجمهٔ چنگیز حیات داوودی بها ۱۲۵ ریال
۸۰۰،۰۰۰،۰۰۰ مردم چین	نوشتهٔ راس تریل ترجمهٔ حسن کامشاد بها ۱۹۵ ریال
یادداشتهای روزانه (چاپ دوم)	نوشتهٔ لئو تروتسکی ترجمهٔ هوشنگ وزیری بها ۷۵ریال

اقتصاد

بحران دلار — نوشتهٔ ر. تریفین ـ ژان دونیزه ـ فرانسواپرو
ترجمهٔ دکتر امیرحسین جهانبگلو
بها ۱۰۵ ریـال

نفت وکشورهای بزرگ جهان (چاپ دوم) — نوشتهٔ پیتر. اودل
ترجمهٔ دکتر امیرحسین جهانبگلو
(زیر چاپ است)

حقوق

مجموعهٔ قوانین ومقررات شهرداریها — گردآورنده هوشنگ زندی
زرکوب ۲۰۰ ریال

آموزش زبان

آموزش حروف انگلیسی (برای نوآموزان زبانهای لاتین) — بها ۱۵ ریال

علی و آذر (کتاب آمـوزش انگلیسی برای نوآموزان) — بها ۴۰ ریال

هدیـه (کتاب آموزش انگلیسی برای نوآموزان) — بها ۳۰ریال

ریاضیات

استقراء ریاضی — نوشتهٔ سومینسکی گولووینا یاگلوم
ترجمهٔ پرویز شهریاری
زرکوب ۱۵۵ ریال

اشتباه استدلالهای هندسی (۴) — نوشتهٔ یاکوف اسمنویچ دوبنوف
ترجمهٔ پرویز شهریاری
شمیز ۵۰ ریال

اصول خط کش محاسبه (۱) — نوشتهٔ م . ه . شفیعیها
شمیز ۷۰ ریال

انعکاس (۵)	نوشتهٔ ایلیا یاکولویچ باکلمان ترجمهٔ پرویز شهریاری شمیز ۵۰ ریال
جبر و مقابله خوارزمی	نوشتهٔ محمدبن موسی خوارزمی ترجمهٔ حسین خدیو جم بها ۹۵ریال
حساب استدلالی (چاپ دوم)	نوشتهٔ محمود مهدی‌زاده ـ مصطفی رنگچی (زیر چاپ است)
۲۵۰ مسئلهٔ حساب	نوشتهٔ واتسلاو سرپینسکی ترجمهٔ پرویز شهریاری زرکوب ۱۵۰ ریال
رسم فنی	نوشتهٔ امیرمنصور صدری ـ جواد افتخاری بها ۷۵ریال
رسم فنی (دانشگاهی)	نوشتهٔ س. بوگولیوبف ـ ا. وینف ترجمهٔ باقر رجالی‌زاده بها ۳۳۰ریال
روشهای مثلثات	نوشتهٔ پرویزشهریاری، احمد فیروزنیا زرکوب ۲۴۵ ریال
ریاضیات چیست؟	نوشتهٔ ریچارد کورانت و هربرت رابینز ترجمهٔ حسن صفاری زرکوب ۶۸۰ ریال
ریاضیات نوین	نوشتهٔ سرژ برمان و رنه بزار ترجمهٔ احمد بیرشك شمیز ۱۹۵ریال
سرگرمیهای هندسه	نوشتهٔ یاکوب ایسیدورویچ پرلمان ترجمهٔ پرویز شهریاری زرکوب ۱۶۵ ریال
فلسفهٔ ریاضی	نوشتهٔ استیفن س. بارکر ترجمهٔ احمد بیرشك شمیز ۱۲۵ ریال

لگاریتم	نوشتهٔ گ. ك. استاپو ترجمهٔ پرویز شهریاری زرکوب ۱۶۵ ریال
مسائل عمومی ریاضیات	نوشتهٔ باقر امامی زرکوب ۳۶۵ ریال
معادلات دیفرانسیل	نوشتهٔ محمدجواد افتخاری بها ۶۰ریال
نامساویها (۳)	نوشتهٔ پاول پتروویچ کاروکین ترجمهٔ پرویز شهریاری بها ۵۰ریال
نظریهٔ مجموعه‌ها (۲)	نوشتهٔ واتسلاو سرپینسکی ترجمهٔ پرویز شهریاری بها ۵۰ریال

علوم طبیعی

آموزش حل مسائل شیمی آلی	نوشتهٔ دکتر پرویز ایزدی بها ۲۵۰ ریال
آموزش شیمی (چاپ چهارم)	نوشتهٔ دکتر پرویز ایزدی شمیز ۲۵۰ ریال
اشعه لازر	نوشتهٔ گریبوفسکی ـ چکالینسکایا ترجمهٔ غضنفر بازرگان بها ۶۵ریال
روش حل مسائل فیزیك	نوشتهٔ م. اسپرانسکی ترجمهٔ غضنفر بازرگان زرکوب ۱۸۵ ریال
سرگرمیهای شیمی	نوشتهٔ ولاسف ـ ترینونف ترجمهٔ باقر مظفر زاده شمیز ۱۴۵ ریال
مبانی زمین‌شناسی	نوشتهٔ ابروچف ترجمهٔ عبدالکریم قریب بها ۲۲۰ ریال
مسائل مسابقات شیمی	ترجمهٔ باقر مظفرزاده بها ۷۰ریال

مسائل مسابقات فیزیك ومكانیك	نوشتهٔ س. او. گونچارنكو ترجمهٔ غضنفر بازرگان زركوب ۲۷۵ ریال

مردم‌شناسی

لوی استروس	نوشتهٔ ادموند لیچ ترجمهٔ دکتر حمید عنایت بها ۱۱۵ ریال

علوم به‌زبان ساده برای کودکان ونوجوانان

خزندگان و دوزیستان	نوشتهٔ لوسیل ساترلند ترجمهٔ احمد ایرانی بها ۶۰ریال
درختان	نوشتهٔ کی‌وین ترجمهٔ احمد ایرانی بها ۶۵ریال
سفربه‌فضا (کتاب برگزیدهٔ سال‌شورای کتاب کودك)	نوشتهٔ لوسیل ساترلند ترجمهٔ احمد ایرانی بها ۶۰ریال
قورباغه را می‌شناسید	ترجمهٔ مهدخت دولت‌آبادی بها ۴۵ریال

پزشکی

طب و پرستار	نوشتهٔ دکتر محمد بهشتی بها ۲۵۰ریال

تکنولوژی

تلویزیون	نوشتهٔ مهندس خداداد القابی بها ۳۰۰ ریال

هنر

راهنمای نقاشی	غلامعلی گنجی بها ۳۵ ریال

صداشناسی موسیقی — نوشتهٔ امین شهمیری
بها ۱۴۵ ریال

ادبیات (تحقیقات ادبی)

بانگ جرس (راهنمای مشکلات دیوان حافظ) — نوشتهٔ پرتو علوی
بها ۹۵ ریال

داستانها و قصه‌ها — تألیف مجتبی مینوی
بها ۱۳۵ ریال

در بارهٔ کلیله و دمنه — نوشتهٔ دکتر محمدجعفر محجوب
بها ۱۸۵ ریال

سخن و سخنوران — نوشتهٔ بدیع‌الزمان فروزانفر
زرکوب ۴۳۵ ریال

سوگ سیاوش (چاپ سوم) — نوشتهٔ شاهرخ مسکوب
(زیر چاپ است)

گزینهٔ ادب فارسی — نوشتهٔ مصطفی بی‌آزار، محمد حسن ظهوری، علی مرتضائیان، نعمت‌الله مطلوب
بها ۱۴۵ ریال

نقد حال — تألیف مجتبی مینوی
زرکوب ۳۹۵ ریال

شعر

گلی برای تو (مجموعهٔ شعر) — از مجدالدین میرفخرائی (گلچین گیلانی)
زرکوب ۱۳۵ ریال

نمایشنامه‌ها

آدم آدم است (چاپ دوم) — نوشتهٔ برتولت برشت
ترجمهٔ شریف لنکرانی
بها ۱۴۵ ریال

افسانه‌های تبای — نوشتهٔ سوفوکلس
ترجمهٔ شاهرخ مسکوب
بها ۲۵۵ ریال

تمثیلات (شش نمایشنامه ویک‌داستان)	نوشتهٔ میرزا فتحعلی آخوندزاده ترجمهٔ میرزا جعفرقراجه‌داغی شمیز ۲۳۵ ریال زرکوب ۲۸۵ ریال
قضیهٔ رابرت اوپنهایمر	نوشتهٔ هاینار کیپهارت ترجمهٔ نجف دریابندری بها ۸۵ ریال

رمانها

آزادی یا مرگ (چاپ دوم)	نوشتهٔ نیکوس کازانتزاکیس ترجمهٔ محمد قاضی بها ۴۵۵ ریال
آقای رئیس جمهور (چاپ سوم)	نوشتهٔ میگل‌انخل استوریاس ترجمهٔ زهرای خانلری (کیا) بها ۲۱۵ ریال
بنال وطن (چاپ دوم)	نوشتهٔ آلن پیتون ترجمهٔ سیمین دانشور بها ۱۶۵ ریال
توروتومبو	نوشتهٔ میگل‌انخل استوریاس ترجمهٔ زهرای خانلری (کیا) بها ۹۵ ریال
جنایت و مکافات	نوشتهٔ فئودور داستایفسکی ترجمهٔ مهری آهی زرکوب ۴۸۵ ریال
سووشون (داستان) (چاپ پنجم)	نوشتهٔ سیمین دانشور بها ۱۲۰ ریال
گذری به هند	نوشتهٔ ای. ام. فورستر ترجمهٔ حسن جوادی زرکوب ۲۶۰ ریال
مسیح باز مصلوب (چاپ دوم)	نوشتهٔ نیکوس کازانتزاکیس ترجمهٔ محمد قاضی بها ۴۵۵ ریال

ادبیات کودکان

اقبال وغول	نوشتهٔ بنیامین ترجمهٔ مهدخت دولت‌آبادی بها ۳۵ ریال
سرگذشت فردیناند	نوشتهٔ رابرت لاوسن ترجمهٔ مهدخت دولت‌آبادی بها ۴۵ ریال

فلسفه و تاریخ

تاریخ چیست؟ (چاپ دوم)	نوشتهٔ ای. اچ. کار ترجمهٔ دکترحسن کامشاد بها ۱۴۵ ریال
فقر تاریخیگری	نوشتهٔ کارل ر. پوپر ترجمهٔ احمدآرام شمیز ۱۱۵ ریال

سفرنامه

سفرنامهٔ جکسن	تألیف ویلیامز جکسن ترجمهٔ منوچهرامیری، فریدون بدره‌ای (زیر چاپ است)
سفرنامهٔ ونیزیان در ایران	نوشتهٔ پنج سوداگر ونیزی در زمان حکومت آق قویونلو ترجمهٔ دکترمنوچهر امیری شمیز ۲۷۵ ریال زرکوب ۳۳۵ ریال

تاریخ

امیرکبیر و ایران	نوشتهٔ فریدون آدمیت زرکوب ۵۲۵ ریال
اندیشهٔ ترقی وحکومت قانون (عصرسپهسالار)	نوشتهٔ فریدون آدمیت زرکوب ۴۶۵ ریال
اندیشه‌های میرزافتحعلی آخوند زاده	نوشتهٔ فریدون آدمیت شمیز ۱۶۵ ریال زرکوب ۲۳۵ ریال

تاریخ و فرهنگ
تألیف مجتبی مینوی
بها ۴۰۵ ریال

جنگ داخلی اسپانیا
نوشتهٔ هیوتامس
ترجمهٔ دکترمهدی سمسار
(زیر چاپ است)

نامه‌هائی از تبریز
نوشتهٔ ادوارد براون
ترجمهٔ حسن جوادی
زرکوب ۳۱۵ ریال

کاوش در ریاضیات ۶

شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

خیابان دانشگاه شماره ۲۲۹

بها ۱۰۵ ریال